## Ganz- & Gebrochen-rationale Funktionen / Kurvenscharen

$f_t(x) = \frac{2x+t}{x^2} \quad mit\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Das zugehörige Schaubild ist $K_t$

Definitionsbereich; Schnittpunkte mit Koordinatenachsen; Extrema und Wendepunkte; Asymptoten; Polstellen/Unstetigkeitsstellen; Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs;

Lösung:

$$f_t(x) = \frac{2x+t}{x^2} \quad mit\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$S_Y$ *existiert nicht, weil* $x=0$ *nicht definiert bzw.* $x=0$ *Polstelle(gerader Grad* $\hat{=}$ *doppelt) ohne VZW*

$$Nullstellen: \quad 2x+t=0 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}t$$

*Grenzwerte / Asymptote:*

$$\lim_{x\to\infty} f_t(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+t}{x^2} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_t(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+t}{x^2} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2x} \rightarrow 0^-$$

$$a(x)=0$$

$$\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to 0^+} f_t(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{t}{x^2} & \rightarrow & \begin{array}{ll} t>0 & \infty \\ t<0 & -\infty \end{array} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f_t(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{t}{x^2} & \rightarrow & \begin{array}{ll} t>0 & \infty \\ t<0 & -\infty \end{array} \end{array}\right\} Pol\ ohne\ VZW$$

$$f_t(x) = \frac{2x+t}{x^2} = \frac{2x}{x^2}+\frac{t}{x^2} = \frac{2}{x}+\frac{t}{x^2}$$

$$f_t'(x) = \frac{2x^2-(2x+t)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2-4x^2-2tx}{x^4} = \frac{-2x^2-2tx}{x^4} = \frac{-2x-2t}{x^3}$$

$$f_t''(x) = \frac{-2x^3-(-2x-2t)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-2x^3-(-2x-2t)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-2x-(-2x-2t)\cdot 3}{x^4} = \frac{-2x+6x+6t}{x^4} = \frac{4x+6t}{x^4}$$

*Extrema:*

$$f_t'(x) = \frac{-2x-2t}{x^3} = 0 \rightarrow -2x-2t = 0 \rightarrow x=-t$$

$$f_t''(-t) = \frac{4\cdot(-t)+6t}{(-t)^4} = \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3} \rightarrow \begin{cases} t>0 & Min\left(-t \,\middle|\, -\frac{1}{t}\right) \\ t<0 & Max\left(-t \,\middle|\, -\frac{1}{t}\right) \end{cases}$$

*Ortskurve der Extrema:*

$$\rightarrow x=-t \rightarrow t=-x \rightarrow y=-\frac{1}{t} \xrightarrow{t=-x} y=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}$$

*Wendestelle:*

$$f_t''(x) = \frac{4x+6t}{x^4} = 0 \rightarrow 4x+6t = 0 \rightarrow x=-1{,}5t$$

*Exkursion: Polstellen*

Schritt 1:

Berechnung der Zähler- und Nennernullstellen unabhängig voneinander.

Schritt 2: Auswertung

1) Lösungswert taucht nur im Nenner auf => Polstelle
2) Lösungswert taucht nur im Zähler auf => Nullstelle
3) Identische Lösungswerte tauchen sowohl im Zähler als auch im Nenner auf
   => Polstelle, wenn die Lösung im Nenner öfter vorliegt als im Zähler
   => sonst: Lücke

$$h_t(x)=\frac{(2x+t)x}{x^2} \rightarrow h_t*(x)=\frac{(2x+t)}{x} \rightarrow x=0 \; Polstelle(ungerader\ Grad \triangleq einfach) \; mit\ VZW$$

$$p_t(x)=\frac{2x+t}{(x-16)^2} \rightarrow (x-16)^2=0 \rightarrow (x-16)(x-16)=0 \rightarrow x=16 \quad und \quad x=16$$

$$\xrightarrow[gleiche\ Lösung]{zweimal} \; Polstelle(gerader\ Grad \triangleq doppelt) \; ohne\ VZW$$

$$p_t(x)=\frac{2x+t}{x^2-16} \rightarrow x^2-16=0 \rightarrow x^2=16 \rightarrow x_1=4 \quad und \quad x_2=-4$$

$$\xrightarrow[Lösungen]{verschiedene} \; Polstellen(ungerader\ Grad \triangleq einfach) \; mit\ VZW$$

Zeigen: Abszissenwert des Extremums von $K_t$ ist arithmetisches Mittel der Abszissenwerte von Schnittpunkt mit x-Achse und des Wendepunktes;

Lösung:

$$Extrema: \quad x_E=-t$$

$$x_N=-\frac{1}{2}t \quad x_W=-\frac{3}{2}t$$

$$Mittelwert: \quad m=\frac{a+b}{2} \rightarrow m=\frac{x_N+x_W}{2} = \frac{-\frac{1}{2}t+\left(-\frac{3}{2}t\right)}{2} = \frac{-2t}{2} = -t=x_E$$

Zeigen: Zu jedem Punkt P auf $K_t$ gibt es einen Punkt Q auf $K_{-t}$, der bezüglich des Ursprungs punktsymmetrisch ist

Lösung:

$f_t(x) = \frac{2x+t}{x^2} \quad mit\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion zum Schaubild **$K_t$**

$f_{-t}(x) = \frac{2x-t}{x^2} \quad mit\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion zum Schaubild **$K_{-t}$**

$$Behauptung: \quad -f_{-t}(-x) = f_t(x)$$

$$Nachweis:$$

$$-f_{-t}(-x) \quad = \quad -\frac{2(-x)-t}{(-x)^2} \quad = \quad -\frac{-[2x+t]}{x^2} \quad = \quad \frac{2x+t}{x^2} \quad = \quad f_t(x)$$

$$\rightarrow \quad Punktsymmetrie$$

Für $t<0$ schließen $K_t$, die x-Achse und die Gerade mit $x = z$ ($z > -0{,}5t$) eine Fläche ein;

(i) berechnen des Flächeninhaltes A(z)

(ii) Wie gestaltet sich die Fläche für $z \rightarrow \infty$?

Lösung:
Gesucht ist die Fläche unterhalb der Funktion mit der rechten Grenze z und der x-Achse

$$A_t(z) \quad = \quad \int_{-0,5t}^{z} f_t(x)\,dx \quad = \quad \int_{-0,5t}^{z} \frac{2x+t}{x^2}\,dx$$

$$Stammfunktion:$$

$$\frac{2x+t}{x^2} \quad = \quad \frac{2x}{x^2} + \frac{t}{x^2} \quad = \quad \frac{2}{x} + tx^{-2} \quad \xrightarrow{\text{"Aufleitung"}} \quad 2\ln|x| - tx^{-1} \quad = \quad 2\ln|x| - \frac{t}{x}$$

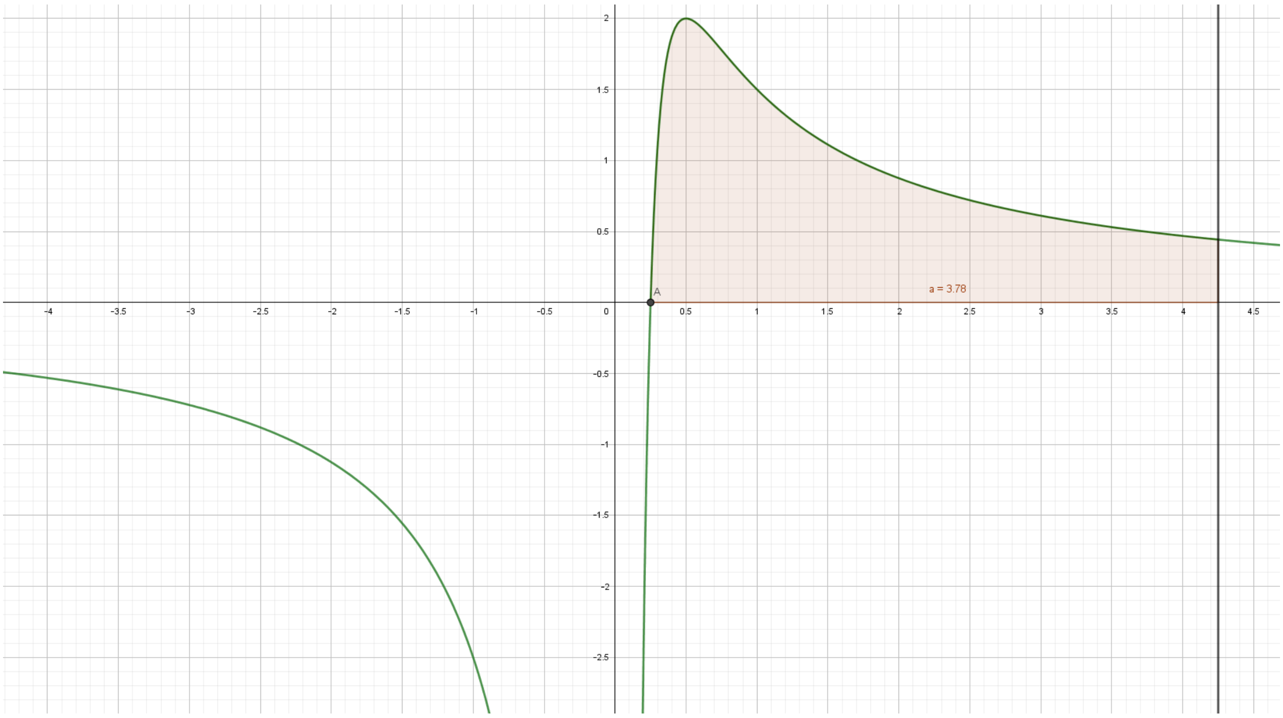
$$A_t(z) \quad = \quad \left[2\ln|x| - \frac{t}{x}\right]_{-0,5t}^{z} \quad = \quad \left[2\ln|z| - \frac{t}{z}\right] - \left[2\ln|-0{,}5t| - \frac{t}{-0{,}5t}\right]$$

$$A_t(z) \quad = \quad 2\ln|z| - 2\ln|-0{,}5t| - \frac{t}{z} + \frac{t}{-0{,}5t} \quad \overset{t<0}{=} \quad 2\ln|z| - 2\ln 0{,}5t - \frac{t}{z} - 2$$

$$A_t(z) \quad = \quad 2\left(\ln|z| - \ln 0{,}5t\right) - \frac{t}{z} - 2 \quad \overset{\ln-Gesetz}{=} \quad 2\ln\left|\frac{z}{0{,}5t}\right| - \frac{t}{z} - 2 \quad = \quad 2\ln\left|\frac{2z}{t}\right| - \frac{t}{z} - 2$$

$$\lim_{z\rightarrow\infty} A_t(z) \quad = \quad \lim_{z\rightarrow\infty}\left(2\ln\left|\frac{2z}{t}\right| - \frac{t}{z} - 2\right) \quad \rightarrow \quad "\infty - 0 - 2" \quad \rightarrow \quad \infty$$

Graph:




Sei nun folgende Funktion gegeben:

$$g_{s;t}(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<1 \\ \dfrac{sx+t}{x^2} & x\geq 1 \end{cases} \quad mit\ s;t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(i) Bestimmen der Werte s und t für g*(x) derart, dass die Funktion stetig und differenzierbar ist

(ii) Zeichnen der Funktion

Lösung:

Bedingung für stetig:

Der Funktionswert an der Grenze/am Übergang muss bei beiden Abschnitten gleich sein.

$$\Rightarrow \quad g_{s;t}(\text{"}x<1\text{"}) = g_{s;t}(\text{"}x\geq 1\text{"}) \rightarrow x^2-1 \overset{\text{"}x=1\text{"}}{=} \frac{sx+t}{x^2} \xrightarrow{x=1} 1-1 = \frac{s+t}{1}$$

$$\rightarrow 0 = s+t \rightarrow s = -t$$

Bedingung für differenzierbar:

Der Wert der Steigung an der Grenze/am Übergang muss bei beiden Abschnitten gleich sein.

$$\Rightarrow \quad g_{s;t}'(\text{"}x<1\text{"}) = g_{s;t}'(\text{"}x\geq 1\text{"}) \rightarrow 2x \overset{\text{"}x=1\text{"}}{=} -\frac{s}{x^2}-\frac{2t}{x^3} \xrightarrow{x=1} 2 = -\frac{s}{1}-\frac{2t}{1}$$

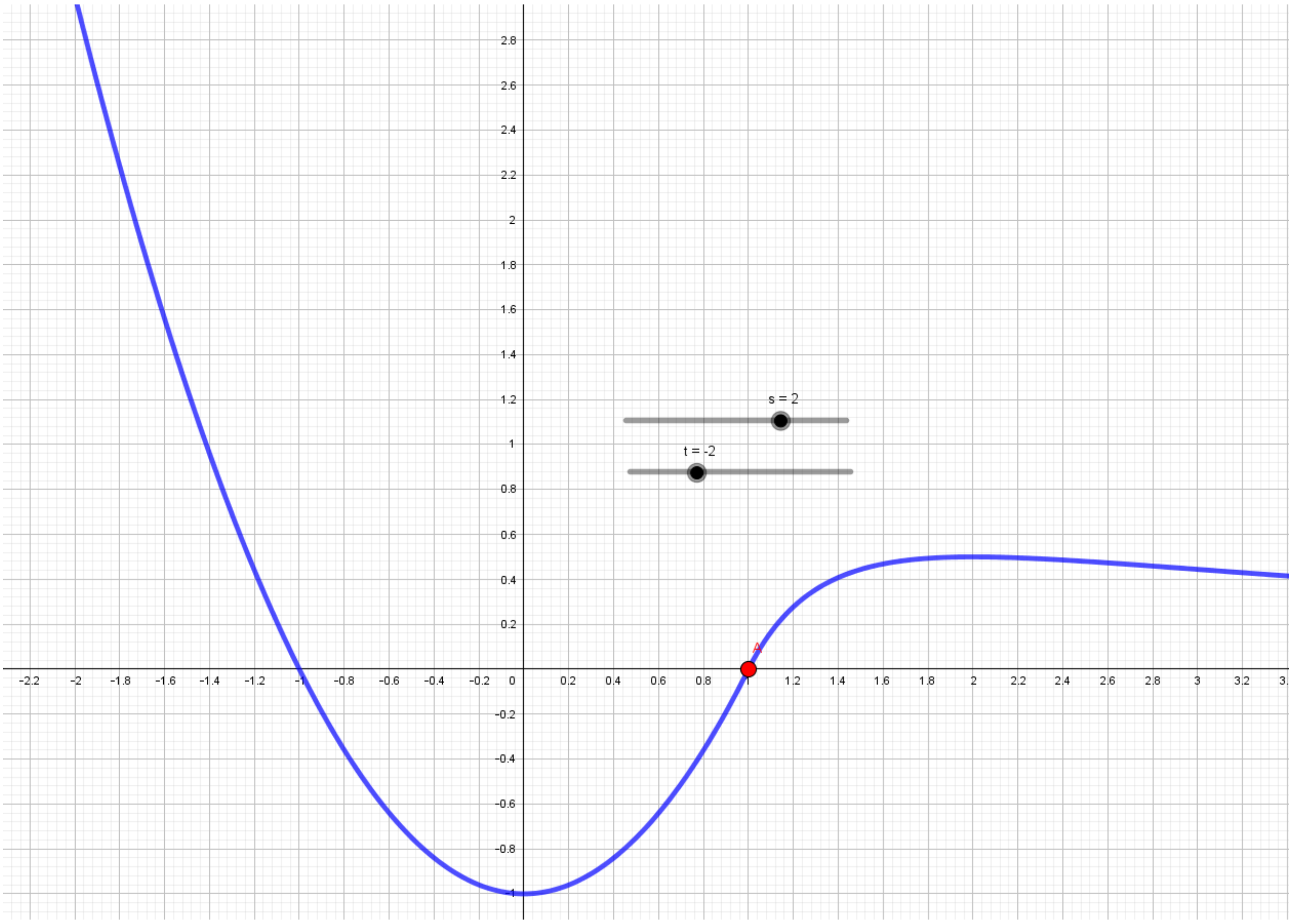
$$\rightarrow 2 = -s-2t \rightarrow s = -2-2t$$

Lösen des LGS und Probe:

$$s = -t \quad \wedge \quad s = -2-2t \quad \rightarrow \quad -t = -2-2t \quad \xrightarrow{+2t} \quad t=-2 \quad \wedge \quad s=2$$

$$\rightarrow \quad g_{2;-2}(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<1 \\ \dfrac{2x-2}{x^2} & x\geq 1 \end{cases} \quad und \quad g_{2;-2}'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ -\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^3} & x\geq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Probe}} \quad g_{2;-2}(1)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 0 & x\geq 1 \end{cases} \quad und \quad g_{2;-2}'(1)=\begin{cases} 2 & x<1 \\ 2 & x\geq 1 \end{cases}$$



Für $x \geq -1$ ist die Funktion G durch $G(x) = \int_{-1}^{x} g^*(\tau)\,d\tau$ definiert;

gesucht ist die Darstellung von G(x) ohne Integralzeichen, d.h. die Integralfunktion

Lösung:

$$g_{2;-2}(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{2x-2}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \leftrightarrow \quad G(x) = \int_{-1}^{x} g^*(\tau)\,d\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{x} (\tau^2 - 1)\,d\tau & -1 \leq x < 1 \\ G(1) + \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{2\tau - 2}{\tau^2}\,d\tau & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad G(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{3}\tau^3 - 1\tau\right]_{-1}^{x} & -1 \leq x < 1 \\ G(1) + \left[2\ln|\tau| + \dfrac{2}{\tau}\right]_{1}^{x} & x \geq 1 \end{cases} \rightarrow \quad G(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}x^3 - x\right) - \left(-\dfrac{1}{3} + 1\right) & -1 \leq x < 1 \\ G(1) + \left(2\ln|x| + \dfrac{2}{x}\right) - (0 + 2) & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad G(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}x^3 - x\right) - \dfrac{2}{3} & -1 \leq x < 1 \\ G(1) + 2\ln|x| + \dfrac{2}{x} - 2 & x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow[G(1) = \left(-\frac{4}{3}\right)]{G(1) = \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1\right) - \frac{2}{3}} G(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}x^3 - x\right) - \dfrac{2}{3} & -1 \leq x < 1 \\ 2\ln|x| + \dfrac{2}{x} - \dfrac{10}{3} & x \geq 1 \end{cases}$$