

Themen: Baumdiagramm; Pfadregeln; Bed. W'keit; Satz von Bayes;
 Bernoulli-Experimente; Binomialverteilung; $\mu(X)$ & $\sigma(X)$

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Der finnische Biathlet **Hunde An-Lainen** möchte seine sportlichen Leistungen auswerten und mit mathematisch-stochastischen Mitteln berechnen. Hierzu sollen Sie einige Fragestellungen lösen.

30

Aufgabe 1: Die Vorbereitung – Trainingsergebnisse

Die Trainingsergebnisse waren ganz erbaulich. In der Woche vor dem ersten Wettkampf hat Hunde täglich besonders das Schießen trainiert.

Folgende Trefferergebnisse hat er dabei erzielt:

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	Summe
Liegend - Anzahl Schüsse	100	100	200		100		800
Liegend - Anzahl Treffer	90			190			760
Trefferquote Stehend		0,88		0,95			???

Das Verhältnis der Treffer an den Wochentagen Mi – Fr – Sa lag bei 2 : 1 : 1.

- a) Hunde An-Lainen ist sich nun etwas unsicher über den Wochenwert der Trefferquote.
 „Wenn ich die Einzelquoten addiere, erhalte ich 0,945!“ denkt er bei sich –
 „Die Relation der Summenwerte ergibt einen besseren Wert.
 Was ist denn jetzt richtig?“

Anmerkung: Die Gedanken wurden zum besseren simultan ins Deutsche übersetzt 😊

Ja was ist denn nun richtig? Und worin liegt der vermeintliche Fehler?

Füllen Sie die Tabelle vollständig aus und schaffen Sie für Klarheit der Fragestellungen.

- b) Ermitteln Sie **den Erwartungswert und die Standardabweichung** bei 100 Schuss
 im Liegend-Anschlag und einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0,95$.

ZUSATZ: Wie hoch wird der Erwartungswert sein, wenn man diesen nun für **jeweils 100 Schuss**
 im **Stehend- und im Liegend-Anschlag** berechnen möchte (p für Stehend-Anschlag: $0,75$)?

- c) Erklären Sie, warum es sich in diesem Experiment um ein Bernoulli-Experiment handeln könnte.
 Erläutern Sie in diesem Zusammenhang auch den Begriff Bernoulli-Kette.
- d) Geben Sie zwei Gründe an, warum die modellhafte Beschreibung des Schießtrainings
 durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird.
- e) Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben Sie eine geeignete Fragestellung hierfür an:

$$B_{100;0,95}(X \leq 90)$$

$$B_{100;0,95}(80 \leq X \leq \mu)$$

$$B_{100;0,95}(X > \mu)$$

Aufgabe 2: Der Abend vor dem Wettbewerb - Auslosung der Startnummern

Bei der Auslosung der Startnummern herrscht immer großer Andrang. Insgesamt sind 70 Starter im Feld und jeder Teilnehmer darf seine Nummer selbst ziehen.

Hunde An-Lainen ist zuerst an der Reihe.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er eine **gerade** Startnummer?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Startnummer **ungerade und eine Dreier-Zahl**?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Startnummer **ungerade oder eine Fünfer-Zahl**?

Die Wunschstartnummer von Hunde An-Lainen wäre aufgrund der Wettersituation die Nummer 60.

- Begründen Sie, ob es wesentlich für Hund An-Lainen ist, an welcher Position er ziehen darf, um die Nummer 60 zu erhalten.

Dokumentieren Sie Ihre Meinung anhand eines (unvollständigen) Baumdiagramms.

- Die Starterfelder werden in eine grüne und eine rote Gruppe eingeteilt. Die internationale Biathlon-Union gibt allerdings nicht bekannt, wie viele in die rote Gruppe der Top-Athleten dürfen. Es werden farbige Kugeln ohne Zurücklegen gezogen – und es ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit

für **mind. einmal grün innerhalb der ersten drei Ziehungen** bei $\frac{763}{782}$ liegt.

Wie viele Sportler sind demzufolge in der roten Gruppe?

Aufgabe 3: Der Wettbewerb – mentale Vorbereitung

Beim Schießen auf fünf nebeneinander liegende Scheiben kalkuliert Hunde An-Lainen mit einer Trefferquote von $p = 90\%$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- trifft er alle fünf Scheiben?
- trifft er mindestens drei Scheiben?
- trifft er nur die beiden letzten Scheiben?
- trifft er zum ersten Mal beim 3. Schuss?
- trifft er genau 3 Scheiben, die nebeneinander liegen?
- trifft er höchstens eine Scheibe nicht?
- Wie groß müsste seine Trefferwahrscheinlichkeit sein, damit die Wahrscheinlichkeit alle 5 Scheiben zu treffen, bei 95 % liegt?
- Wie viele Schüsse muss er mindestens abgeben, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einen Treffer erzielt?

Aufgabe 4: Der Wettbewerb

Hunde An-Lainen hat eine Trefferquote von 90 % beim (**L**)iegend- und 75 % beim (**S**)tehendschießen.

Es wird jeweils zweimal liegend und zweimal stehend geschossen – also die Reihenfolge am Schießstand lautet: **L – L – S – S**

Bei jeder Durchführung werden **5 Schuss** abgegeben.

Teil 1: Die Realität

Für jeden Fehlschuss muss man eine Strafrunde laufen.

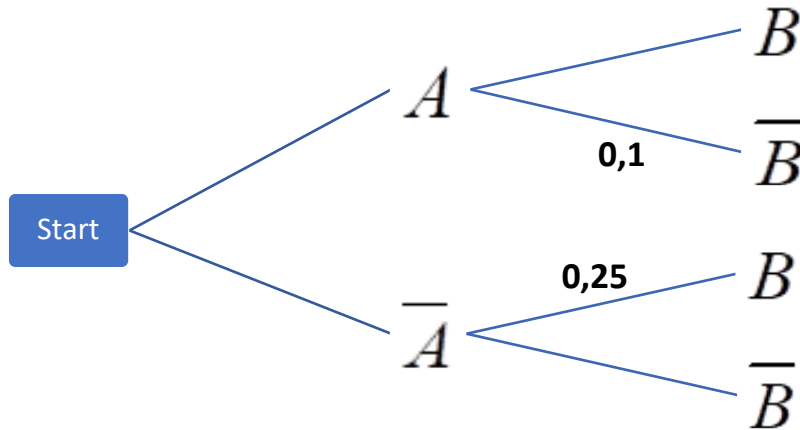
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Hunde An-Lainen

- bei den beiden Liegendschießen **je eine** Strafrunde laufen muss,
- bei den beiden Stehendschießen **insgesamt zwei** Strafrunden zu absolvieren hat,

Teil 2: Die Analyse

Gegeben sei das folgende unvollständige Baumdiagramm.

- a) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm und erstellen Sie eine Vierfeldertafel mit den Ereignissen $A = \text{„Liegend-Schießen“}$ und $B = \text{„Treffer“}$



	Liegend-Schießen $P(A)$	Stehend-Schießen $P(\bar{A})$	Summe
Treffer $P(B)$			
Fehlschuss $P(\bar{B})$			
Summe			

- b) Erstellen Sie das umgekehrte Baumdiagramm.
 c) Prüfen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.
 d) Hunde An-Lainen hat einen Fehlschuss produziert.
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit war es im Stehend-Schießen?
 e) Beweisen Sie die nachfolgenden Behauptungen mittels der formalen Definition

der bedingten Wahrscheinlichkeit:
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(i) Behauptung 1: $P_\Omega(A) = P(A)$

(ii) Behauptung 2: $P_B(A \cup B) = 1$

(iii) Berechnen Sie folgende Ausdrücke: $P_A(A)$ und $P_{\bar{A}}(A)$

Aufgabe 5: Qualitätstests

12

Hunde An-Lainen testet die Qualität von Skiern und Skistöcken.

Leider brechen immer wieder einige der Skistöcke und das nervt ihn gewaltig.

Auf Nachfrage wird ihm gesagt, dass man insgesamt 100 Skistöcke auf Lager hat und diese aus verschiedenen Produktionsstandorten kommen:

Fabrikstandort	Produktionsanteil	Fehlerquote
Jyväskylä	25 %	6 %
Turku	40 %	4 %
Tampere	20 %	8 %
Rovaniemi	Rest	3 %

- a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen einwandfrei produzierten Skistock?
b) Wieder ist ein Skistock gebrochen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde er in Turku hergestellt?

Aufgabe 6: Pressekonferenz und Kantinengedanken

20

Hunde Anlainen darf nach seinem letzten Wettbewerb auf die Pressekonferenz.

Es sind **10 Medienvertreter** anwesend. **3 kommen aus Finnland, 2 aus Schweden, 4 aus Norwegen und einer stammt aus Russland.**

Aufgrund des zeitlichen Rahmens dürfen nur **5 Fragen** gestellt werden.

- a) Wie viele mögliche Fragen gibt es, wenn jeder Medienvertreter nur eine Frage stellen darf, sofern er zu Wort kommt?
b) Wie viele Fragen würden gestellt werden, wenn **jeder** Medienvertreter 3 Fragen formulieren dürfte?
c) Es ist nun vereinbart, dass 6 Fragen gestellt werden dürfen:

Wie ist dann der folgende Rechenausdruck zu interpretieren? $4! \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{1}{1}$

Nach der Pressekonferenz geht Hunde An-Lainen in die Kantine, um sich zu stärken.

Es gibt heute das Sparmenü aus Suppe, Salat, Hauptspeise und Nachtisch.

- d) Wie viele Kombinationen könnte er sich zusammenstellen, wenn er unter 2 Vorspeisen, 5 Salattellern, 4 Hauptgerichten und 6 Nachtischkreationen jeweils eines auswählt?

- e) Glücksspiel in der Kantine

Um sich etwas abzulenken, spielt Hunde An-Lainen am Glücksrad. Ein Spiel kostet 2 Euro.

Bleibt das Glücksrad auf einem grünen Feld stehen, gewinnt man nichts, auf einem gelben oder blauen Feld gewinnt man 1 Euro. Bei einem violetten Feld gewinnt man 2 Euro und auf dem roten Feld gewinnt man 10 Euro.

„Eigentlich ist das Spiel nicht sonderlich fair, aber man kann ja auch eine Menge ansahnen!“ denkt er sich und beginnt zu spielen.

Prüfen Sie die Vermutung „nicht fair“.



	Gewinn	Wahrscheinlichkeit
	0€	
	1€	
	2€	
	10€	

Aufgabe 7: Mathematische Theorie und Rechenkunst

20	
----	--

- a) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^8$ mit dem Binomischen Lehrsatz
- b) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Binomialkoeffizient und dem Aufbau des Pascalschen Dreiecks.
- c) Lösen Sie folgende Gleichungen zum Binomialkoeffizient:

(i) $\binom{n}{2} = 190$

(ii) $\binom{n}{n-3} = \frac{1}{3}n$

Zusatzaufgabe: Nun noch ein paar Fragen zu Finnland

6	
---	--

- Wie heißt die Hauptstadt?
- Nennen Sie die drei Nachbarstaaten von Finnland.
- Wie heißt Finnland in der Landessprache?
- Mit welcher Währung wird in Finnland bezahlt?