Lineare Algebra – Produktverflechtung

Beispiel Regalsysteme

Grundbestandteile: Holz / Metall / Glas R1 / R2 / R3

Bauteile: B1 / B2 / B3

Regaltyp: E1 / E2 / E3

$$M_{RB} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{BE} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Frage 1: **Zusammenhangsmatrix Grundbestandteile – Regaltypen**

$$M_{RB} \cdot M_{BE} = M_{RE} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 11 \\ 21 & 42 & 17 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Frage 2: **Bestellauftrag: (E1 / E2 / E3) = (3 / 5 / 1)**

a) Menge an Grundbestandteilen und
b) Menge an Bauteilen

a) $$M_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 21 & 11 \\ 21 & 42 & 17 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+105+11 \\ 63+210+17 \\ 12+45+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152 \\ 290 \\ 60 \end{pmatrix}$$

b) $$M_{BE} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Frage 3: **Bestellauftrag: (E1 / E2 / E3) = 2 : 3 : 5**

Menge an Grundbestandteilen (Rohstoffe)

und Menge an Bauteilen (Zwischenprodukte),

wenn von den Bauteilen insgesamt 6.600 ME vorhanden sind.

$$M_{BE}\cdot\begin{pmatrix}2x\\3x\\5x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}2&5&1\\1&2&1\\3&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2x\\3x\\5x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24x\\13x\\29x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$6600=24x+13x+29x\quad\rightarrow\quad 6600=66x\quad\rightarrow\quad x=100$$

$$\begin{pmatrix}2400\\1300\\2900\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}200\\300\\500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}12&21&11\\21&42&17\\4&9&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\300\\500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14200\\25300\\5000\end{pmatrix}$$

Frage 4: **Lösung der Matrizengleichung A * B = C . Gesucht ist B.**

B ist 3x3-Matrix

$3\ Matrizen:$

$$A\cdot B=C\ \xrightarrow[\text{von Links}]{A^{-1}}\ A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot C$$

$$\xrightarrow[E]{A^{-1}\cdot A}\ E\cdot B=A^{-1}\cdot C\ \xrightarrow[\text{neutrales Element}]{E\cdot B=B}\ B=A^{-1}\cdot C$$

$A\ Matrix\ und\ 2\ Vektoren:$

$$A\cdot\vec{b}=\vec{c}\ \xrightarrow[\text{von Links}]{A^{-1}}\ A^{-1}\cdot A\cdot\vec{b}=A^{-1}\cdot\vec{c}$$

$$\xrightarrow[E]{A^{-1}\cdot A}\ E\cdot\vec{b}=A^{-1}\cdot\vec{c}\ \xrightarrow[\text{neutrales Element}]{E\cdot\vec{b}=\vec{b}}\ \vec{b}=A^{-1}\cdot\vec{c}$$

$$\begin{pmatrix}2&4&2\\1&3&4\\3&1&1\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}22&12&4\\22&19&5\\17&5&4\end{pmatrix}\qquad Det\left(\begin{array}{ccc|c|c}2&4&2&2&4\\1&3&4&1&3\\3&1&1&3&1\end{array}\right)=26$$

$$A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-1&-2&10\\11&-4&-6\\-8&10&2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ B=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-1&-2&10\\11&-4&-6\\-8&10&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}22&12&4\\22&19&5\\17&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&1\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}$$

Adjungierte Matrix => Transponieren => VZ-Schema nach Laplace => geteilt durch Det

Frage 5: **Produktionsauftrag mit Lagerbeständen von Bauteilen (B1 / B2 / B3) = (560/1000/197,33)**

– allerdings sollen 25 % Reserve je Bauteil verbleiben

– der Rest darf in die Produktion

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 750 \\ 148 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösungsverhalten von LGS mit Scharparameter

$$\begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Det von $\begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ berechnen und gleich 0 setzen => Fallunterscheidungen

$$Det \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 8k^2 - 6k + 1 \overset{!}{=} 0 \quad \to \quad x_1 = 0,5 \quad und \quad x_2 = 0,25$$

$$NR:$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & k & 1 & 2 & k \\ 1 & k^2 & k & 1 & k^2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) = 8k^2 + 3k^2 + 1 - 3k^2 - 2k - 4k = 8k^2 - 6k + 1$$

LGS ist eindeutig lösbar für $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right\}$

Kontrolle für $k=\frac{1}{4}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{1}{4} & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & 1 & 4 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \quad I \leftrightarrow II \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & \frac{1}{4} & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-3I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{13}{16} & \frac{13}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 8\cdot II \\ 16\cdot III \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 13 & 52 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ III-13II \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -204 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \textit{Widerspruch} \end{array} \quad \rightarrow \textit{keine Lösung}$$

Kontrolle für $k=\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 1 & 4 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad I \leftrightarrow II \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-3I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \textit{Widerspruch} \rightarrow \textit{keine Lösung}$$