Themengebiete:

Zufallsexperiment;

Bernoulli-Experiment / -Kette

Bedingte W'keit ⇔ Satz von Bayes ⇔ Totale Wahrscheinlichkeit

Vierfeldertafel ⇔ Baumdiagramm

Pfadregeln

Binomialverteilung (Einzelwahrscheinlichkeiten / Summenwahrscheinlichkeiten / Anzahl n berechnen / Zeichnung der BV => Säulendigramm)

Sigma-Intervalle => Wahrscheinlichkeiten und Grenzen

Erwartungswert und Standardabweichung (auch der BV)

⇨ $E(X) = \mu = n \cdot p \qquad V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$
$S(X) = \sqrt{V(X)}$

Fragen zur Stochastik

Handling von Erwartungswerten und Varianzen

Klausurergebnisse in Mathematik und Statistik

Punkte	**10**	**8**	**6**	**4**	**2**	**N**
Mathematik	**20**	**15**	**4**	**0**	**1**	**40**
Anteile	**20/40**	**15/40**	**4/40**	**0**	**1/40**	**1**
Statistik	**30**	**8**	**2**	**0**	**0**	**40**
Anteile	**30/40**	**8/40**	**2/40**	**0**	**0**	**1**

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(X = x_i)$$

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \cdot p(X = x_i) - \mu^2$$

$$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$E(M)=\mu=10\cdot\frac{20}{40}+8\cdot\frac{15}{40}+6\cdot\frac{4}{40}+4\cdot\frac{0}{40}+2\cdot\frac{1}{40}=8,65$$

$$V(M)=\sigma^2=10^2\cdot\frac{20}{40}+8^2\cdot\frac{15}{40}+6^2\cdot\frac{4}{40}+4^2\cdot\frac{0}{40}+2^2\cdot\frac{1}{40}-8,65^2$$

$$V(M)=\sigma^2=100\cdot\frac{20}{40}+64\cdot\frac{15}{40}+36\cdot\frac{4}{40}+16\cdot\frac{0}{40}+4\cdot\frac{1}{40}-74,8225$$

$$V(M)=\sigma^2=77,7-74,8225=2,8775$$

$$S(M)=\sqrt{2,8775}=1,6936$$

Erwartungswert Mathematik

E(M) = 8,65 V(M) = 2,8775 S(M) = 1,16963

Erwartungswert Statistik

E(M) = 9,4 V(M) = 1,24 S(M) = 1,1135

Für das Gesamtmodul werden die erreichten Punkte addiert und dann ins Modulzeugnis eingetragen.

Schritt 1:

Hierfür müssen die Anteile mittels eines zweistufigen Pfaddiagramms kombiniert werden:

Darstellung: Gitterdiagramm (Punktesumme und die W'keit => Pfadregeln)

Punkte Statistik Mathematik	10	8	6	4	2
10	20 (10+10) 0,375	18 (10+8) 0,1	16 (10+6) 0,025	14 (10+4) 0	12 (10+2) 0
8	18 (8+10) 0,28125	16 (8+8) 0,075	14 (8+6) 0,01875	12 (8+4) 0	10 (8+2) 0
6	16 (6+10) 0,075	14 (6+8) 0,02	12 (6+6) 0,005	10 (6+4) 0	8 (6+2) 0
4	14 (4+10) 0	12 (4+8) 0	10 (4+6) 0	8 (4+4) 0	6 (4+2) 0
2	12 (2+10) 0,01875	10 (2+8) 0,005	8 (2+6) 0,00125	6 (2+4) 0	4 (2+2) 0

Aus dem Gitterdiagramm bildet man dann die Summentabelle für beide Klausurergebnisse => Gesamtmodul:

Punkte	20	18	16	14	12	10	8	6	4
W'keit	0,375	0,38125	0,175	0,03875	0,02375	0,005	0,00125	0	0

Prüfen auf W'keitsverteilung: Summe der W'keiten muss 1 ergeben

0,375 + 0,38125 + 0,175 + 0,03875 + 0,02375 + 0,005 + 0,00125 = 1

Welcher Erwartungswert, welche Varianz und welche Standardabweichung liegen vor?

E(M und S) V(M und S) S(M und S)

$$E(M/S) =$$
$$\mu_{M/S} = 20 \cdot 0,375 + 18 \cdot 0,38125 + 16 \cdot 0,175 + 14 \cdot 0,03875 + 12 \cdot 0,02375 + 10 \cdot 0,005 + 8 \cdot 0,00125 = 18,05$$

$$V(M/S) =$$
$$\sigma^2_{M/S} = 20^2 \cdot 0,375 + 18^2 \cdot 0,38125 + 16^2 \cdot 0,175 + 14^2 \cdot 0,03875 + 12^2 \cdot 0,02375 + 10^2 \cdot 0,005 + 8^2 \cdot 0,00125 - 18,05^2$$
$$\sigma^2_{M/S} = 400 \cdot 0,375 + 324 \cdot 0,38125 + 256 \cdot 0,175 + 196 \cdot 0,03875 + 144 \cdot 0,02375 + 100 \cdot 0,005 + 64 \cdot 0,00125 - 325,8025$$
$$\sigma^2_{M/S} = 329,92 - 325,8025 = 4,1175$$

$$S(M/S) = \sigma_{M/S} = \sqrt{4,1175} = 2,02916$$

Wie geht es kürzer???

$$E(M/S) = \mu_{M/S} = 18,05 = 8,65 + 9,4 = \mu_M + \mu_S$$

$$V(M/S) = \sigma^2_{M/S} = 4,1175 = 2,8775 + 1,24 = \sigma^2_M + \sigma^2_S$$

$$S(M/S) = \sigma_{M/S} = \sqrt{4,1175} = 2,02916 \neq \sqrt{2,8775} + \sqrt{1,24} = \sigma_M + \sigma_S$$

Erwartungswert und Varianz dürfen addiert werden.

Bei der Standardabweichung geht dies nicht.

Allgemein gilt:

$$E(M/S)=E(M)+E(S)$$
$$V(M/S)=V(M)+V(S)+2Cov(M/S)$$

$$S(M/S)\neq S(M)+S(S)$$

$$Begründung:$$
$$S(M/S)=\sqrt{V(M/S)} \quad weil\ S(M/S)=\sqrt{V(M)+V(S)+2Cov(M/S)}$$
$$S(M/S)\neq S(M)+S(S) \quad weil\ S(M)+S(S)=\sqrt{V(M)}+\sqrt{V(S)}$$

Gitterdiagramm

Graphische Darstellung von Zufallsexperimenten

z.B. zweifacher Würfelwurf (Summen)

W1 W2	1	2	3	4	5	6
1	1/1 =2	1/2= 3	1/3 = 4			
2						
3						
4						
5						
6						

z.B. zweifacher Würfelwurf (Produkte)

W1 W2	1	2	3	4	5	6
1	1/1 =1	1/2= 2	1/3 = 3			
2						
3						
4						
5						
6						

Zweifacher Münzwurf

Münze 1 Münze 2	W	Z
W	W / W	W / Z
Z	Z / W	Z / Z

Summenwahrscheinlichkeit BV

$$B_{n,p}\left(a \le X \le b\right) = \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$$

Ziehung von Losen:

$$Gewinnw'keit: \quad n = 20\ Lose \quad p = 0{,}05 \quad Anzahl\ der\ Gewinne: \{1;2;3;4\}$$

$$B_{20;0,05}\left(1 \le X \le 4\right) = \sum_{k=1}^{4} \binom{20}{k} 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{20-k} = 0{,}6389$$

Wie viele Lose muss man mind. kaufen, damit man mit einer W'Keit von mind. 0,8 (80 %) mind. ein Gewinnlos bekommt?

$$B_{n;0,05}\left(X \ge 1\right) \quad \ge \quad 0{,}8$$

$$1 - B_{n;0,05}\left(X = 0\right) \quad \ge \quad 0{,}8$$

$$-B_{n;0,05}\left(X = 0\right) \quad \ge \quad -0{,}2$$

$$B_{n;0,05}\left(X = 0\right) \quad \le \quad 0{,}2$$

$$\binom{n}{0} 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n \quad \le \quad 0{,}2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0{,}95^n \quad \le \quad 0{,}2 \quad \to \quad \ln 0{,}95^n \quad \le \quad \ln 0{,}2 \quad \to \quad n \quad \ge \quad \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}95} \quad = 31{,}377$$

$$n \quad \ge \quad 32$$

Man muss mindestens 32 Lose erwerben.