Vollständiges (totales) Differential:

Unter dem totalen Differential bzw. der vollständigen Ableitung ersteht man folgenden Ausdruck:

Unter dem vollständigen Differential $df\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$ der differenzierbaren Funktion $f\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$ versteht man die Summe aller partiellen Differentiale:

$$df\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k$$

Das totale Differenzial wir auf Funktionen mit mehreren Variablen angewendet, um die tendenzielle Änderung der Funktion bei Änderung einer oder mehrerer Variablen zu ermitteln.

Daher ist das totale Differential ein Maß für die Veränderung der Funktion $f\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$, wenn man sich im Punkt $P\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$ ein Stück in Richtung $\Delta x_k \; mit \; k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$ bewegt bzw. die Werte verändert:

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta f\left(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n\right) \quad = \quad \lim_{\Delta \to 0} \Delta f\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots, x_n + \Delta x_n\right) \quad \xrightarrow{\lim_{\Delta \to 0}} \quad df$$

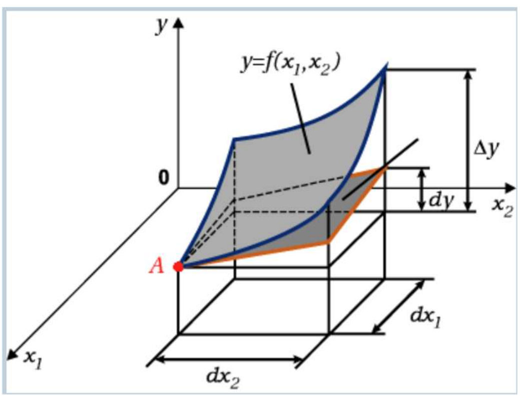
Graphisch betrachtet haben wir hier eine Hyperebene, auf der sich der Punkt bewegt.

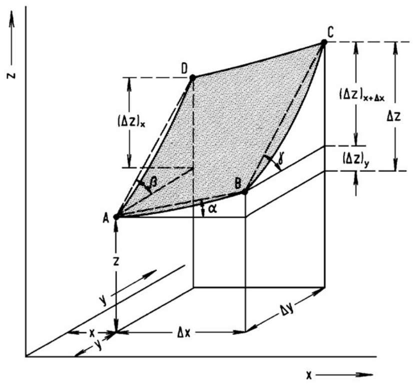
*Für den **Fall n = 2**:*

$$df\left(x_1; x_2\right) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1; x_2\right) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1; x_2\right) \cdot dx_2 \quad = \quad f_{x_1}\left(x_1; x_2\right) \cdot dx_1 + f_{x_2}\left(x_1; x_2\right) \cdot dx_2$$

$$df\left(x_0; y_0\right) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0; y_0\right) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0; y_0\right) \cdot dy \quad = \quad f_x\left(x_0; y_0\right) \cdot dx + f_y\left(x_0; y_0\right) \cdot dy$$

Die Geometrische Bedeutung kann in hier vorliegenden dreidimensionalen Fall (Funktion mit zwei unabhängigen Variablen x_1 und x_2 mit einer davon abhängigen Variablen) stellt das totale oder vollständige Differential die näherungsweise Änderung in einer unendlich (= infinitesimal) kleinen Umgebung des Funktionswertes eines in einer Tangentialebene liegenden Berührpunktes $P\left(x_1, x_2\right)$.





Aufgaben / Übungen:

Teil 1: Totales Differenzial

Berechnen Sie das totale Differenzial der folgenden Funktionen mit zwei Variablen:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ => $df(x,y) = 2x \cdot dx + 2y \cdot dy$

b) $f(x,y) = 3x^4 - 7xy + x - 5y$ =>

$$df(x,y) = \left(12x^3 - 7y + 1\right) \cdot dx + \left(-7x + 5\right) \cdot dy$$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ =>

$$df(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot dy$$

d) $f(x,y) = \sqrt[4]{x^3 + \frac{1}{y^5}}$ =>

$$df(x,y) = \frac{1}{4} \cdot \left(x^3 + \frac{1}{y^5}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot 3x^2 \cdot dx + \frac{1}{4} \cdot \left(x^3 + \frac{1}{y^5}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-5)\frac{1}{y^6} \cdot dy$$

e) $f(x,y) = e^{x^2} + e^{4xy} + \frac{1}{y^3}$ =>

$$df(x,y) = \left(2x \cdot e^{x^2} + 4y \cdot e^{4xy}\right) \cdot dx + \left(4x \cdot e^{4xy} - \frac{3}{y^4}\right) \cdot dy$$

f) $f(x,y) = e^{x^2} + e^{4xy} \cdot y^3$ =>

$$df(x,y) = \left(2x \cdot e^{x^2} + 4y^4 \cdot e^{4xy}\right) \cdot dx + \left(4xy^3 \cdot e^{4xy} + 3y^2 \cdot e^{4xy}\right) \cdot dy$$

g) $f(x,y) = \frac{2y}{x^2 + 1}$ =>

$$df(x,y) = \left[(-1)\frac{2y}{\left(x^2+1\right)^2} \cdot 2x\right] \cdot dx + \frac{2}{x^2+1} \cdot dy = \frac{-4xy}{\left(x^2+1\right)^2} \cdot dx + \frac{2}{x^2+1} \cdot dy$$

h) $f(x,y) = \left(x^2 + \frac{5}{2y}\right)^4$ =>

$$df(x,y) = 4\cdot\left(x^2+\frac{5}{2y}\right)^3\cdot 2x\cdot dx + 4\cdot\left(x^2+\frac{5}{2y}\right)^3\cdot\left(-\frac{5}{2y^2}\right)\cdot dy$$

$$df(x,y) = 8x\cdot\left(x^2+\frac{5}{2y}\right)^3\cdot dx - \frac{10}{y^2}\cdot\left(x^2+\frac{5}{2y}\right)^3\cdot dy$$

Berechnen Sie das totale Differenzial der folgenden Funktionen mit drei Variablen:

i) $f(x,y,z) = x^2\cdot y^3\cdot z^4$ =>

$$df(x,y,z) = \left(2x\cdot y^3\cdot z^4\right)\cdot dx + \left(3\cdot x^2\cdot y^2\cdot z^4\right)\cdot dy + \left(4\cdot x^2\cdot y^3\cdot z^3\right)\cdot dz$$

j) $f(x,y,z) = e^{x^4+y^2+z^3}$ =>

$$df(x,y,z) = 4x^3\cdot e^{x^4+y^2+z^3}\cdot dx + 2y\cdot e^{x^4+y^2+z^3}\cdot dy + 3z^2\cdot e^{x^4+y^2+z^3}\cdot dz$$

$$df(x,y,z) = e^{x^4+y^2+z^3}\left(4x^3\cdot dx + 2y\cdot dy + 3z^2\cdot dz\right)$$

k) $f(x,y,z) = \sqrt{x^5\cdot y^3\cdot z}$ =>

$$df(x,y,z) = \frac{5x^4\cdot y^3\cdot z}{2\sqrt{x^5\cdot y^3\cdot z}}\cdot dx + \frac{3\cdot x^5\cdot y^2\cdot z}{2\sqrt{x^5\cdot y^3\cdot z}}\cdot dy + \frac{x^5\cdot y^3\cdot 1}{2\sqrt{x^5\cdot y^3\cdot z}}\cdot dz$$

l) $f(x,y,z) = \ln\left(x^5\cdot y^3\cdot z\right)$ =>

$$df(x,y,z) = \frac{5x^4\cdot y^3\cdot z}{x^5\cdot y^3\cdot z}\cdot dx + \frac{3\cdot x^5\cdot y^2\cdot z}{x^5\cdot y^3\cdot z}\cdot dy + \frac{x^5\cdot y^3\cdot 1}{x^5\cdot y^3\cdot z}\cdot dz$$

$$df(x,y,z) = \frac{5}{x}\cdot dx + \frac{3}{y}\cdot dy + \frac{1}{z}\cdot dz$$

Ermitteln Sie das totale Differential der gegebenen Funktionen im Punkt P:

m) $f(x,y) = x^3 + 4xy^2$ $\qquad P(x,y,f) = (2 \mid 3 \mid f)$

$$df(x,y) = \left(3x^2+4y^2\right)\cdot dx + 8xy\cdot dy$$

$$\xrightarrow[y=3]{x=2} df(2;3) = 48\cdot dx + 48\cdot dy = 48\cdot(dx+dy)$$

n) $f(x,y) = e^{x^3} + \frac{4x}{y^2}$ $\qquad P(x,y,f) = (1 \mid 2 \mid f)$

$$df(x,y) = \left(3x^2 \cdot e^{x^3} + \frac{4}{y^2}\right) \cdot dx - \frac{8x}{y^3} \cdot dy$$

$$\xrightarrow[y=2]{x=1} df(1;2) = (3e+1) \cdot dx - 1 \cdot dy = (3e+1) \cdot dx - dy$$

Teil 2: Implizite Funktionen

Bilden Sie die 1. Ableitung der **implizit gegebenen Funktionen**.

a) $-x^2 + 5x - y - 1 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x)$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{-2x^2+5}{-1} = -2x^2+5$$

b) $x^3 \cdot e^y - 2y \cdot e^x + 2 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x)$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2 \cdot e^y - 2y \cdot e^x}{x^3 \cdot e^y - 2 \cdot e^x}$$

c) $6x^2 - 0{,}5y^2 + 10 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x)$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{12x}{-y} = \frac{12x}{y} = \frac{12x}{\sqrt{12x^2+20}}$$

d) $u \cdot e^v - v^2 \cdot e^u + uv = 0 \rightarrow \frac{dv}{du} = v'(u)$

$$\rightarrow \frac{dv}{du} = v'(u) = -\frac{f_u}{f_v} = -\frac{1 \cdot e^v - v^2 \cdot e^u + v}{u \cdot e^v - 2v \cdot e^u + u}$$

e) $\ln(ab) - b^2 \cdot \ln a + a \cdot \ln b = 0 \rightarrow \frac{db}{da} = b'(a)$

$$\rightarrow \frac{db}{da} = b'(a) = -\frac{f_a}{f_b} = -\frac{\frac{1 \cdot b}{ab} - b^2 \cdot \frac{1}{a} + \ln b}{\frac{1 \cdot a}{ab} - 2b \cdot \ln a + a \cdot \frac{1}{b}} = -\frac{\frac{1}{a} - b^2 \cdot \frac{1}{a} + \ln b}{\frac{1}{b} - 2b \cdot \ln a + a \cdot \frac{1}{b}}$$

$$-\frac{f_a}{f_b} = -\frac{\frac{1}{a} \cdot \left(1 - b^2 + a \cdot \ln b\right)}{\frac{1}{b} \cdot \left(1 - 2b^2 \ln a + a\right)} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1 - b^2 + a \cdot \ln b}{1 - 2b^2 \ln a + a}$$

f) $2x^2+3y^2+4z^4 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx}=z'(x) \quad und \quad \dfrac{dz}{dy}=z'(y)$

$$\rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=z'(x) \quad = \quad -\frac{f_x}{f_z} \quad = \quad -\frac{4x}{16z^3} \quad = \quad -\frac{x}{4z^3}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dz}{dy}=z'(y) \quad = \quad -\frac{f_y}{f_z} \quad = \quad -\frac{6y}{16z^3} \quad = \quad -\frac{3y}{8z^3}$$

Teil 3: Grenzrate der Substitution

a)

Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(x,y) \quad = \quad 0,5\cdot x^{0,4}\cdot y^{0,6}$ mit dem Produktionsniveau f = 16 [ME].

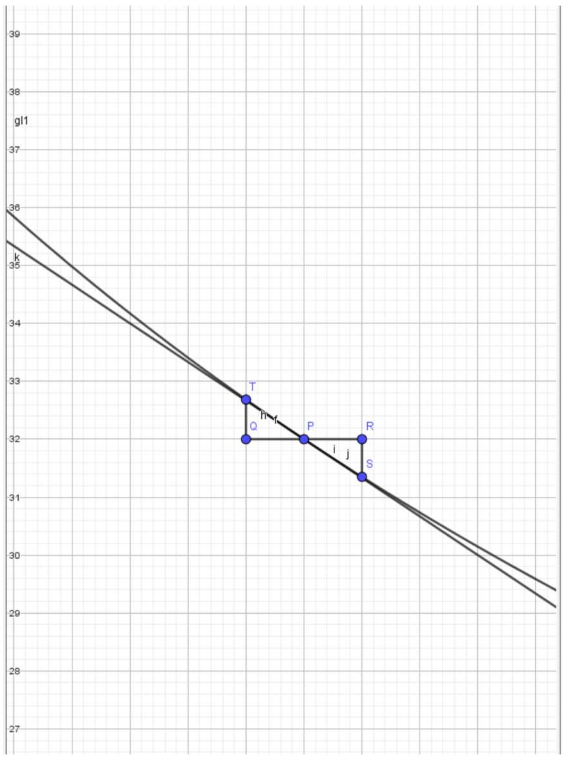
Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution an der Stelle x = 32.

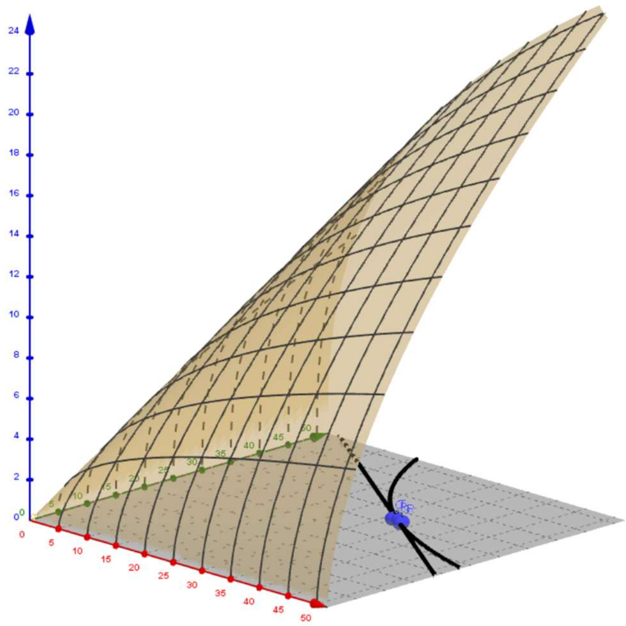
$$\xrightarrow{Berechnung\ y} \quad f(32;y) \quad = \quad 0,5\cdot 32^{0,4}\cdot y^{0,6} \quad = \quad 16$$

$$\xrightarrow[:32^{0,4}]{\cdot 2} \quad y^{0,6}=\frac{32}{32^{0,4}} \quad \rightarrow \quad y^{0,6}=32^{0,6} \quad \rightarrow \quad y=32$$

$$\xrightarrow{Berechnung\ GRS} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{y^{0,6}}{x^{0,6}}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{x^{0,4}}{y^{0,4}}} \quad = \quad -\frac{\frac{1}{5}\cdot y}{\frac{3}{10}\cdot x} \quad \xrightarrow{x=y=32} \quad -\frac{\frac{1}{5}\cdot 32}{\frac{3}{10}\cdot 32} \quad = \quad -\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{3} \quad = \quad -\frac{2}{3}$$

Um das Produktionsniveau von f = 16 bei der Faktoreinsatzkombination (x , y) = (32 ; 32) zu erhalten, muss im Fall von $\Delta x=-1 \quad \rightarrow \quad \Delta y=\dfrac{2}{3}$ und umgekehrt gelten bzw. erfüllt sein.





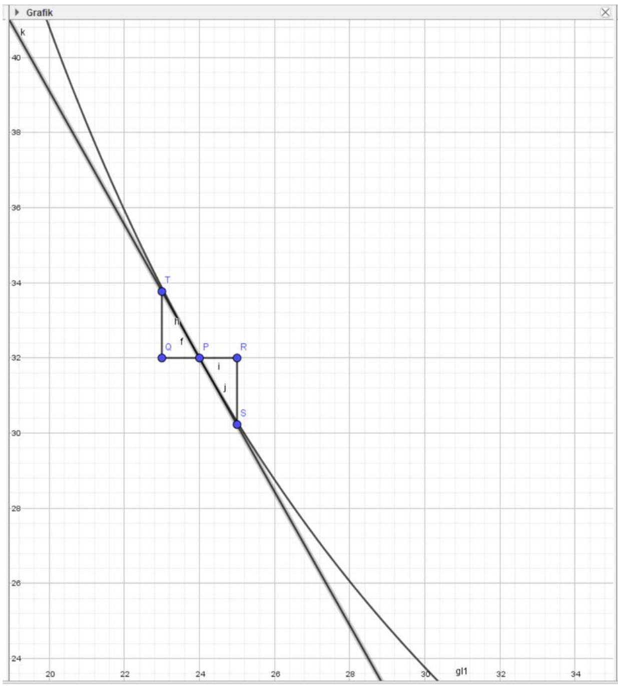
b)

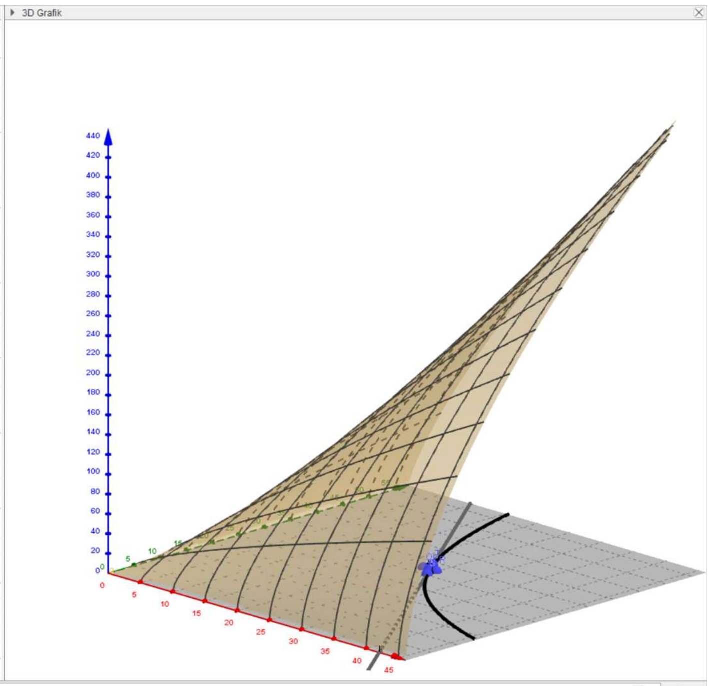
Gegeben sei die (ordinale) Nutzenfunktion $u(x,y) \;=\; 2 \cdot x^{0,8} \cdot y^{0,6}$ mit den verfügbaren Konsummengen x = 24 [ME] und y = 32 [ME].
Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.

$$\xrightarrow[u(x,y) \;=\; 2\cdot x^{0,8}\cdot y^{0,6}]{Berechnung\ u} u(24;32) \;=\; 2 \cdot 24^{0,8} \cdot 32^{0,6} \;=\; 203,37$$

$$\xrightarrow{Berechnung\ GRS} \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = -\frac{1,6 \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,2}}}{1,2 \cdot \frac{x^{0,8}}{y^{0,4}}} \;=\; -\frac{1,6 \cdot y}{1,2 \cdot x} \xrightarrow[y=32]{x=24} -\frac{1,6 \cdot 32}{1,2 \cdot 24} \;=\; -\frac{4}{3} \cdot \frac{32}{24} \;=\; -\frac{16}{9}$$

Um das Nutzenniveau von u = 203,37 bei der Faktoreinsatzkombination (x , y) = (24 ; 32) zu erhalten, muss im Fall von $\Delta x = -1 \quad \rightarrow \quad \Delta y = \frac{16}{9}$ (Konsumanstieg) und umgekehrt gelten bzw. erfüllt sein.





c)

Gegeben sei die (ordinale) Nutzenfunktion $u\left(a,b,c,d\right) \quad = \quad 2\cdot\sqrt{ab}+8\sqrt{bc}+\sqrt{d}$

Das erzielbare Nutzenniveau U ergibt sich aus den verfügbaren Konsummengen a = 20 [ME], b = 20 [ME], c = 5 [ME] und d = 25 [ME].

Um wie viele Einheiten muss c.p. der Konsum des 2. Gutes b gesteigert werden, wenn vom 3. Faktor eine halbe Einheit substituiert werden soll, das erreichte Nutzenniveau allerdings erhalten bleiben soll?

$$u\left(a,b,c,d\right) \quad = \quad 2\cdot\sqrt{ab}+8\sqrt{bc}+\sqrt{d} \quad \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Berechnung } u} \quad u\left(20;20;5;25\right) \quad = \quad 2\cdot\sqrt{400}+8\sqrt{100}+\sqrt{25} \quad = \quad 40+80+5 \quad = \quad 125$$

$$\xrightarrow{\text{Berechnung GRS}} \quad \frac{dc}{db}=-\frac{u_b}{u_c}=-\frac{2\cdot\frac{a}{2\cdot\sqrt{ab}}+8\cdot\frac{c}{2\cdot\sqrt{bc}}}{8\cdot\frac{b}{2\cdot\sqrt{bc}}} \quad = \quad -\frac{\frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{4\cdot c}{\sqrt{bc}}}{\frac{4\cdot b}{\sqrt{bc}}}$$

$$\xrightarrow{\text{Berechnung GRS}} \quad \frac{dc}{db} \quad = \quad -\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}+4\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}}{4\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}} \quad \xrightarrow[c=5]{a=b=20} \quad -\frac{\sqrt{1}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}}{4\cdot\sqrt{4}} \quad = \quad -\frac{1+2}{8} \quad = \quad -\frac{3}{8}$$

Um das Nutzenniveau von u = 125 bei der Faktoreinsatzkombination (a,b,c,d) = (20 ; 20 ; 5 ; 25) zu erhalten, muss im Fall von $\Delta b=-1 \quad \rightarrow \quad \Delta c=\frac{3}{8}$ (Konsumanstieg) und umgekehrt gelten bzw. erfüllt sein oder

Eine Einheit von Gut 3 (= c) wird durch $\Delta c=-1 \quad \rightarrow \quad \Delta b=\frac{8}{3}$ von Gut 2 (= b) substituiert.

Anlage:

Folgende Anwendungen sind hieraus möglich:

- ⇨ Ableitung impliziter Funktionen
- ⇨ Grenzrate der Substitution einer Produktions- oder Nutzenfunktion

Ableitung von Funktionen in impliziter Form mit $f\left(x_1,x_2\right)=0$

$$df \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2 \quad = \quad 0 \quad \xrightarrow{:dx_1}$$

$$0 \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1} \quad \xrightarrow{GRS} \quad GRS \quad = \quad \frac{dx_2}{dx_1} \quad = \quad -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} \quad = \quad -\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}}$$