

## Das Leontief-Modell

Formeln als Grundlage:

Inputmatrix bzw. technologische Matrix  $T$  aus der Input-Output-Tabelle

$$(1) \quad T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$$

$$(2) \quad \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$(3) \quad \vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y} \quad \text{mit Leontief-Inverse } (E - T)^{-1}$$

Produktionsvektor  $\vec{x}$  geben.

Wir wissen, dass sich der Produktionsvektor wie folgt berechnet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix}$$

und durch etwas Umformung erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und jetzt den letzten Term noch etwas umgeformt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Die Matrix  $T$  heißt *technologische Matrix* oder *Input-Matrix*. Sie gibt den für den Produktionsprozess notwendigen Input an. Die Koeffizienten von  $T$  werden auch als *Produktionskoeffizienten* bezeichnet.

Die Elemente der Matrix  $T$  geben an, wie viele Einheiten von einem Sektor für jede Einheit eines anderen Sektors bereitzustellen sind, damit der wechselseitige Bedarf gedeckt wird.

Anmerkung: *Invertierung von Matrizen*  $\Rightarrow$  Verfahren über die adjungierte Matrix

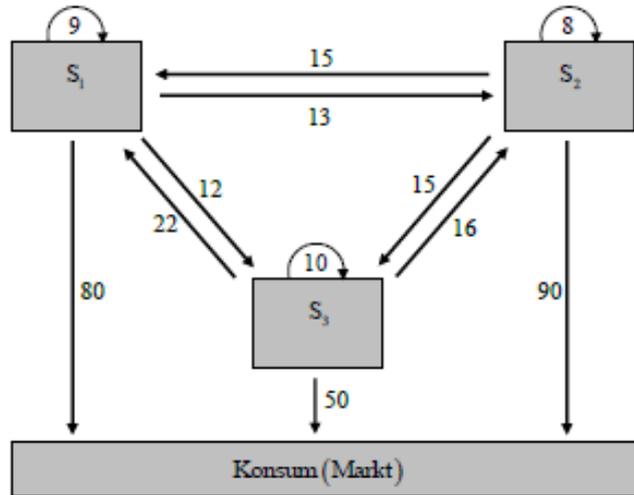
- (1) Unterdeterminanten für die jeweiligen Positionen bilden
- (2) Transponieren der Matrix
- (3) Vorzeichenschema entspr. der Laplace-Entwicklung anwenden

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- (4) Ergebnis-Matrix mit Kehrwert der Determinante multiplizieren

**Aufgaben**

- 1.0 Die gegenseitige Verflechtung dreier Sektoren  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  einer Volkswirtschaft sind gemäß dem folgenden Verflechtungsdiagramm untereinander mit dem Markt verflochten.
- 1.1 Wie viele Einheiten werden von den einzelnen Sektoren insgesamt produziert?
- 1.2 Erstellen Sie eine vollständige Verflechtungstabelle mit Input, Output, Marktgabe und Gesamtproduktion.



Lösung: Gesamt-Verflechtung

		Output				
		$S_1$	$S_2$	$S_3$	Markt $y_i$	Gesamt $x_i$
Input	$S_1$	9	13	12	80	114
	$S_2$	15	8	15	90	128
	$S_3$	22	16	10	50	98

- 2.0 Die Teilbetriebe A, B und C einer Fabrik sind untereinander und mit dem Markt verflochten. Die Verflechtung wird durch folgende Tabelle beschrieben.

		Output				
		A	B	C	Markt	Gesamt
Input	an					
	von					
	A	12	a	0	18	35
B	10	5	8	b	48	
C	15	20	10	20	c	

- 2.1 Bestimmen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle.
- 2.2 Stellen Sie die Verflechtung der Betriebe untereinander und mit dem Markt in Form eines Verflechtungsdiagramms dar.

Lösung: Ergänzung der Tabelle: a = 5 b = 25 c = 65

3.0 Drei Sektoren einer Volkswirtschaft sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.

Die gegenseitige Verflechtung und die Gesamtproduktion werden durch folgende Tabelle beschrieben.

von \ an	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	Gesamt
S <sub>1</sub>	50	25	0	200
S <sub>2</sub>	15	20	30	100
S <sub>3</sub>	45	0	15	150

3.1 Berechnen Sie den Konsumvektor.

3.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix.

Lösung:

	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	Markt y <sub>i</sub>	Gesamt x <sub>i</sub>
S <sub>1</sub>	50	25	0	y <sub>1</sub>	200
S <sub>2</sub>	15	20	30	y <sub>2</sub>	100
S <sub>3</sub>	45	0	15	y <sub>3</sub>	150

$y_i = x_i - \sum_{j=1}^3 S_{ij}$

	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	Markt y <sub>i</sub>	Gesamt x <sub>i</sub>
S <sub>1</sub>	50	25	0	y <sub>1</sub> = 200 - 75 = 125	200
S <sub>2</sub>	15	20	30	y <sub>2</sub> = 100 - 65 = 35	100
S <sub>3</sub>	45	0	15	y <sub>3</sub> = 150 - 60 = 90	150

$\vec{y} = \begin{pmatrix} 125 \\ 35 \\ 90 \end{pmatrix}$

Input-Matrix bzw. Technologische Matrix

Ausgangspunkt: Verflechtungsmatrix A

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 25 & 0 \\ 15 & 20 & 30 \\ 45 & 0 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{50}{200} & \frac{25}{100} & 0 \\ \frac{15}{200} & \frac{20}{100} & \frac{30}{150} \\ \frac{45}{200} & 0 & \frac{15}{150} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,075 & 0,2 & 0,2 \\ 0,225 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} = T$$

4.0 Drei Sektoren einer Volkswirtschaft sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.

Die Input-Matrix  $T$ , der Produktionsvektor  $\vec{x}$  und der Konsumvektor  $\vec{y}$  sind gegeben durch:

$$T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ a & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 60 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ c \end{pmatrix}$$

Welche Bedeutung haben die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$ ?

Lösung:

- $a =$  Produktionskoeffizient von Sektor S3 zur Deckung des Bedarfs von einer Mengeneinheit des Sektors S1  
 $\Rightarrow$  Wie viele Mengeneinheiten werden von S3 benötigt, um eine Mengeneinheit von S1 herzustellen?
- $b =$  Produktionsmenge des Sektors S1
- $c =$  externe Nachfrage bzw. Marktnachfrage von Produkten des Sektors S3

5.0 Drei Teilbereiche A, B und C eines Werks sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Die Input-Matrix ist

$$T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,25 & 0,1 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Für den nächsten Zeitraum können in den einzelnen Betrieben Mengeneinheiten hergestellt werden, die gegeben sind durch den Produktionsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Welche Nachfrage(menge) kann im gefragten Produktionszeitraum befriedigt werden?

Lösung:

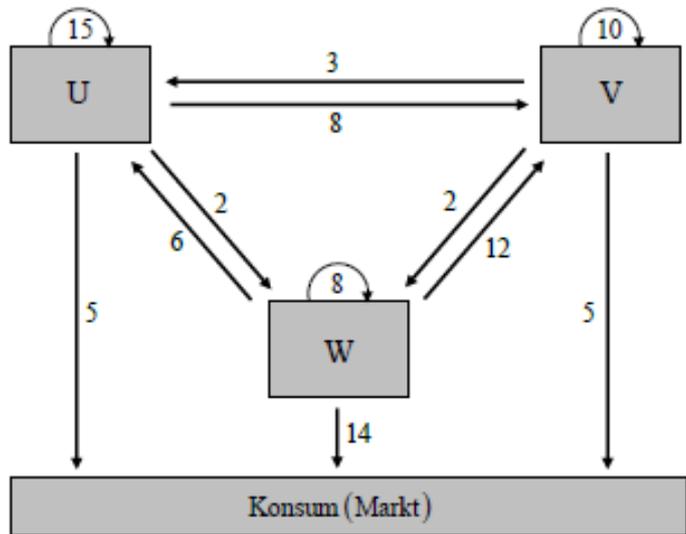
$$\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,25 & 0,1 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & 0 \\ -0,25 & 0,9 & -0,15 \\ -0,2 & -0,15 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 44,5 \\ 53 \end{pmatrix}$$

6.0 Die drei Teilbetriebe eines Industrieunternehmens sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.

Das folgende Diagramm zeigt die gegenseitige Verflechtung der einzelnen Teilbetriebe und die Gesamtproduktion



6.1 Erstellen Sie eine Verflechtungstabelle. Geben Sie den Produktionsvektor  $\vec{x}$  und die Verflechtungsmatrix A an

6.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix T.

6.3 Zu einem früheren Zeitpunkt betrug der Marktvektor  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1,5 \\ 14 \end{pmatrix}$ .

Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor  $\vec{x}$ .

Lösung: Gesamt-Verflechtung

		Output				
		U	V	W	Markt $y_i$	Gesamt $x_i$
Input	U	15	8	2	5	30
	V	3	10	2	5	20
	W	6	12	8	14	40

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{15}{30} & \frac{8}{20} & \frac{2}{40} \\ \frac{3}{30} & \frac{10}{20} & \frac{2}{40} \\ \frac{6}{30} & \frac{12}{20} & \frac{8}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,05 \\ 0,1 & 0,5 & 0,05 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix} = T$$

$$\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,4 & -0,05 \\ -0,1 & 0,5 & -0,05 \\ -0,2 & -0,6 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1,5 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 370 & 350 & 45 \\ 90 & 390 & 30 \\ 160 & 380 & 210 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1,5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

7.0 Drei Werke  $W_1$ ,  $W_2$  und  $W_3$  einer Firma sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Die gegenseitigen und für den Markt erbrachten Leistungen enthält die folgende Tabelle.

von \ an	$W_1$	$W_2$	$W_3$	Gesamt
$W_1$	0	50	15	335
$W_2$	80	0	45	125
$W_3$	40	25	0	85

7.1 Erläutern Sie, welche besondere Form die Verflechtungstabelle besitzt.

7.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix.

7.3 Berechnen Sie den Vektor  $\vec{x}$  für den Nachfragevektor  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{pmatrix}$ .

Lösung:

Es gibt keinen Eigenbedarf bei den drei Produktionssektoren.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 15 \\ 80 & 0 & 45 \\ 40 & 25 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 335 \\ 125 \\ 85 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{50}{125} & \frac{15}{85} \\ \frac{80}{335} & 0 & \frac{45}{85} \\ \frac{40}{335} & \frac{25}{125} & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{x} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{50}{125} & \frac{15}{85} \\ \frac{80}{335} & 0 & \frac{45}{85} \\ \frac{40}{335} & \frac{25}{125} & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{50}{125} & -\frac{15}{85} \\ -\frac{80}{335} & 1 & -\frac{45}{85} \\ -\frac{40}{335} & -\frac{25}{125} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225,53 \\ 273,83 \\ 260,62 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung zur Leontief-Inversen:

$$\#7: \left[ \begin{array}{ccc|c} \hline 1273 & 2479 & 737 & 70 \\ 993 & 3972 & 1324 & 82 \\ 520 & 5455 & 1085 & 152 \\ \hline 993 & 3972 & 1324 & \\ \hline 136 & 561 & 1717 & \\ \hline 331 & 1324 & 1324 & \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{bmatrix}$$

$$\#8: \begin{bmatrix} 225.5261832 \\ 273.8343403 \\ 260.6238670 \end{bmatrix}$$