Matrizen: Übergangsprozesse

Aufgabe 1:
Statisches Gleichgewicht und Übergangsmatrizen I
Eine Analyse ergab, dass die Einwohner von Matrizien im Vergleich zum Vorjahr folgende Veränderungen ihres Urlaubsreiseverhaltens vornahmen:

	Inland	Ausland	Übersee
Inland	80 %	20 %	40 %
Ausland	15 %	70 %	50 %
Übersee	5 %	10 %	10 %

Angenommen das Änderungsverhalten bliebe entsprechend der angegebenen Tabelle auch in den folgenden Jahren konstant, dann würde sich nach einigen Jahren ein Gleichgewicht einstellen und die prozentualen Anteile würden sich nicht mehr ändern.
Bestimmen sie dieses Gleichgewichtsverhalten.

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,4 \\ 0,15 & 0,7 & 0,5 \\ 0,05 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz: \quad U \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \xrightarrow{-\vec{x}} \quad U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,4 \\ 0,15 & 0,7 & 0,5 \\ 0,05 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,15 & -0,3 & 0,5 \\ 0,05 & 0,1 & -0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 22z \\ 16z \\ 3z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,15 & -0,3 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 22 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,537 \\ 0,390 \\ 0,073 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
Statisches Gleichgewicht und Übergangsmatrizen II
40 % der Belegschaft der BASF verbrachte im Jahre 2016 die Ferien im Inland (Per-sonengruppe A), 50 % im europäischen Ausland (Personengruppe B) und 10 % im außer-europäischen Ausland (Personengruppe C). Umfragen haben nun ergeben, dass im Jahr 2016 70 % der Personengruppe A wiederum die Ferien im Inland verbringen wollen, 20 % im europäischen Ausland und 10 % im außereuropäischen Ausland. Von der Personengruppe B wollen 20 % im Inland, 60 % im europäischen Ausland und 20 % außerhalb Europas ihren Urlaub verbringen.
Für die Personengruppe C lauten die analogen Prozentzahlen 30 %, 40 % und 30 %.

a) Bilden Sie aus den Angaben, den Zustandsvektor $\vec{z}_{2016}$ und die Übergangs-matrix U.

b) Ermitteln Sie die voraussichtlichen Zustände 2017 und 2018 bei konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten.

c) Wie lautet der Zustandsvektor, bei dem ein statisches Gleichgewicht realisiert wird?

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,41 \\ 0,42 \\ 0,17 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,41 \\ 0,42 \\ 0,17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,422 \\ 0,402 \\ 0,176 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz: \; U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{-\vec{x}} U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 10z \\ 9z \\ 4z \end{pmatrix} \quad mit\; z \in \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,4 & 0,4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,435 \\ 0,391 \\ 0,174 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Statisches Gleichgewicht und Übergangsmatrizen III

Drei Firmen A, B und C führen neue Zahnpasten auf dem Markt ein.
Zu Beginn sind die Marktanteile wie folgt verteilt: A hat 40 %, B hat 20 % und C hat 40 %.

Während des ersten Jahres behält A 85 % seiner Kunden, verliert 5 % an B und 10 % an C;
B behält 75 % seiner Kunden, verliert 15 % an A und 10 % an C;
C behält 90 % und verliert an A und B jeweils 5 % seiner Kunden.

a) Man stelle eine Matrix, die den Übergang der Marktanteile im ersten Jahr beschreibt, und einen aktuellen Marktanteilsvektor auf.

b) Welche Anteile haben die einzelnen Firmen am Ende des ersten und des zweiten Jahres unter der Voraussetzung, dass die jährlichen Änderungen dieselben bleiben wie im ersten Jahr?

c) Ermitteln Sie die *stationäre* Verteilung der Marktanteile für eine Konsumentengruppe von 10.000 Personen.

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,19 \\ 0,42 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,19 \\ 0,42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,381 \\ 0,183 \\ 0,436 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz: \; U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{-\vec{x}} U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,15 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & -0,25 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & -0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ 3z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix} -0,15 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & -0,25 & 0,05 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,167 \\ 0,500 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:
Statisches Gleichgewicht und Übergangsmatrizen IV

Die Umsätze zweier rivalisierender Firmen *A*, *B* entwickeln sich wie folgt:
In jedem neuen Jahr werden $^3/_4$ des bisherigen eigenen Umsatzes und
$^1/_4$ des bisherigen Umsatzes der konkurrierenden Firma eingenommen.

a) Man stelle die zugehörige Übergangsmatrix M auf.

b) Zu Beginn habe die Firma A keinen Umsatz und die Firma B den Umsatz U.
Welchen Umsatz haben die Firmen A und B am Ende des
(i) ersten Jahres (= Beginn des zweiten Jahres)?
(ii) zweiten Jahres?
(iii) n-ten Jahres?

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz: \quad U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{-\vec{x}} U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,25 & 0,25 \\ 0,25 & -0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \quad mit\ y \in \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{x+y=1} \begin{pmatrix} -0,25 & 0,25 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$