Mathematik
Jürgen Meisel

Übungsblatt: Matrizen und Determinanten

1.) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&-1&5\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}2&0&3\\4&0&-1\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix}\quad K=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun folgende Ausdrücke:

a) A + 2 C b) 3A – 4F + C c) B - 3K

d) D + A e) H + 4C^T – (A – G)^T f) K + 2H

Lösungen:

$$A+2C=\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&8&-2\\2t&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&10&2\\-2+2t&5&2+t\end{pmatrix}$$

$$3A-4F+C=3\cdot\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}3&0&1\\2&-1&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix}=$$

$$3A-4F+C=\begin{pmatrix}3&6&12\\-6&3&3t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&0&4\\8&-4&20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&10&7\\-14+t&9&3t-19\end{pmatrix}$$

$$B-3K=\begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\t\\-7\end{pmatrix}\quad oder\quad \begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\t\\-7\end{pmatrix}$$

$$D+A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}\quad \textit{nicht möglich wegen Formatunterschied}$$

$$H+4C^T-(A-G)^T=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix}^T-\left[\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&3\\4&0&-1\end{pmatrix}\right]^T$$

$$H+4C^T-(A-G)^T=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&4t\\16&8\\-4&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-6\\2&1\\1&t+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&7+4t\\17&6\\-1&6-t\end{pmatrix}$$

$$K+2H=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix}\quad \textit{nicht möglich wegen Formatunterschied}$$

Bestimmen Sie die Produkte

a) $A * C^T$	b) $C^T * A$	c) $H * C$	d) $C * H$	e) $D * A$
f) D^2	g) $H * D$	h) $F * G$	i) $E * A$	j) $A * E$

Lösungen:

$$A\cdot C^T=\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&t\\4&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} A\cdot C^T & \begin{pmatrix}1&t\\4&2\\-1&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1+8+(-4)&t+4+4\\-2+4-t&-2t+2+t\end{pmatrix}\end{array}=\begin{pmatrix}5&t+8\\2-t&2-t\end{pmatrix}$$

$$\textit{Formatprobe}:\quad (2\mid 3)\cdot(3\mid 2)=(2\mid 2)$$

$$C^T\cdot A=\begin{pmatrix}1&t\\4&2\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} C^T\cdot A & \begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&t\\4&2\\-1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1-2t&2+t&4+t^2\\0&10&16+2t\\-3&-1&-4+t\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\textit{Formatprobe}:\quad (3\mid 2)\cdot(2\mid 3)=(3\mid 3)$$

$$H\cdot C=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} H\cdot C & \begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2+t&10&-1\\3-t&10&-4\\4+3t&22&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\textit{Formatprobe}:\quad (3\mid 2)\cdot(2\mid 3)=(3\mid 3)$$

$$C\cdot H=\begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} H\cdot C & \begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&4&-1\\t&2&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10&-6\\2t+10&t+1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\textit{Formatprobe}:\quad (2\mid 3)\cdot(3\mid 2)=(2\mid 2)$$

$$D\cdot A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} D\cdot A & \begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&5&8+t\\-9&2&4t-4\end{pmatrix}\end{array}$$

$$Formatprobe:\quad (2\mid 2)\cdot(2\mid 3)=(2\mid 3)$$

Achtung: $D=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}\ \rightarrow\ D^2=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\-6&15\end{pmatrix}\qquad bitte\ nicht: D^2=\begin{pmatrix}4&1\\1&16\end{pmatrix}$

$$H\cdot D=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} H\cdot D & \begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\4&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3&6\\7&-1\\5&16\end{pmatrix}\end{array}$$

$$Formatprobe:\quad (3\mid 2)\cdot(2\mid 2)=(3\mid 2)$$

$$F\cdot G\quad\rightarrow\quad Formatprobe:\quad (2\mid 3)\cdot(2\mid 3)\rightarrow nicht\ möglich$$

Besonderheit bei der Multiplikation mit der Einheitsmatrix E:

$$A\cdot E=\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} A\cdot E & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1+0+0&0+2+0&0+0+4\\-2+0+0&0+1+0&0+0+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}=A\end{array}$$

$$Formatprobe:\quad (2\mid 3)\cdot(3\mid 3)=(2\mid 3)$$

Matrix ist E ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation.

$$E\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} E\cdot A & \begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1+0&2+0&4+0\\0-2&0+1&0+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&1&t\end{pmatrix}=A\end{array}$$

$$Formatprobe:\quad (2\mid 2)\cdot(2\mid 3)=(2\mid 3)$$

⇨ A*E = E*A = A

Wo gilt die binomische Formel und wo nicht? Warum?

k) $(A * C^T + D)^2 = (A\, C^T)^2 + 2A\, C^T D + D^2$

l) $(D + E)^2 = D^2 + 2DE + E^2$

Lösung:

k) $(A * C^T + D)^2 = (AC^T)^2 + 2AC^TD + D^2$

$(A * C^T + D)^2 = (A * C^T + D) * (A * C^T + D) = (AC^T)^2 + AC^TD + DAC^T + D^2$

Aufgabe k) ist so nicht möglich, da das Kommutativgesetz vorausgesetzt wird, welches aber nicht grundsätzlich angenommen werden darf;

l) $(D + E)^2 = D^2 + 2DE + E^2$ ist korrekt

bei Aufgabe l) ist das Kommutativgesetz gültig, da es sich um eine Multiplikation mit der Einheitsmatrix handelt.

2.) Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & ab \\ 1 & -b \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ x & 1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & 2a^2b^2 \\ -1 & (a-b)^2 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ o) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 0 & 3 & 54 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Lösungen:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 6 = 22$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - (-2) = 22$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,1 - 0,12 = -0,02$ e) $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - b$ f) $\begin{vmatrix} a & ab \\ 1 & -b \end{vmatrix} = -2ab$

g) $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 0$

h) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & 2a^2b^2 \\ -1 & (a-b)^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2 \cdot (a-b)^2 + 2a^2b^2 = \left[(a+b)\cdot(a-b)\right]^2 + 2a^2b^2$

$= (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 2a^2b^2 = a^4 + b^4$

i) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 16 + 18 - 0 - 120 - 6 = -92$ j) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 - (-1) - 1 - 1 = 0$

k) $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$ l) $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$ m) $\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}=0+2+2-0-0-0=4$

n) $\begin{vmatrix}x&y&z\\2&0&4\\3&2&-1\end{vmatrix}=0+12y+4z-0-8x-(-2y)=-8x+14y+4z$ o) $\begin{vmatrix}1&2&34\\0&3&54\\0&0&2\end{vmatrix}=6$

3.) Berechnen Sie die Matrizenprodukte **AB, BA, AO, AE und EB** für

$$A=\begin{pmatrix}6&2&4\\0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&-4\\0&0\\-3&6\end{pmatrix}\quad O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Lösungen:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}6&2&4\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-4\\0&0\\-3&6\end{pmatrix}= \begin{array}{c|c} A\cdot B & \begin{pmatrix}2&-4\\0&0\\-3&6\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}6&2&4\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$Formatprobe:\quad (2\mid 3)\cdot(3\mid 2)=(2\mid 2)$$

$$B\cdot A=\cdot\begin{pmatrix}2&-4\\0&0\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&2&4\\0&1&0\end{pmatrix}= \begin{array}{c|c} B\cdot A & \begin{pmatrix}6&2&4\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&-4\\0&0\\-3&6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}12&0&8\\0&0&0\\-18&0&-12\end{pmatrix}\end{array}$$

$$Formatprobe:\quad (3\mid 2)\cdot(2\mid 3)=(3\mid 3)$$

$$A\cdot O=\begin{pmatrix}6&2&4\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}= \begin{array}{c|c} A\cdot O & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}6&2&4\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$Formatprobe:\quad (2\mid 3)\cdot(3\mid 3)=(2\mid 3)$$

$$A\cdot E_3=E_2\cdot A=A\quad und\quad B\cdot E_2=E_3\cdot B=B$$

5.) Welche Matrix X ist mit der Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

vertauschbar, so dass AX = XA gilt ?

Lösung:

$$Ansatz:\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{linke Seite}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix}\\ \xrightarrow{\text{rechte Seite}}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}\end{array}\right\}\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}a+c=a \rightarrow c=0\\ b+d=a+b \rightarrow d=a\\ c=c\\ d=c+d\end{cases}$$

$$\text{Ergebnis: }\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\quad mit\ a,b\in\Re$$

Probe:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ 0 & a\end{pmatrix}\quad und\quad\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

6.) Gegeben sei die Matrix $A=\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ a & 0,5\end{pmatrix}$

Für welche reellen Zahlen a gilt

a) $A + A^T = E$, b) $A - A^T = O$, c) $AA = A$, d) $aA + E \leq O$,

wenn E die Einheitsmatrix und O die Nullmatrix von passendem Format sind.

Lösung:

$$A+A^T=E \rightarrow \begin{pmatrix}0,5 & 1\\ a & 0,5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,5 & a\\ 1 & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l}1+a=0 \rightarrow a=-1\\ a+1=0 \rightarrow a=-1\end{array}$$

$$A-A^T=O \rightarrow \begin{pmatrix}0,5 & 1\\ a & 0,5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,5 & a\\ 1 & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l}1-a=0 \rightarrow a=1\\ a-1=0 \rightarrow a=1\end{array}$$

$$A\cdot A=A \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}0,5 & 1\\ a & 0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ a & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,25+a & 1\\ a & a+0,25\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ a & 0,5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 0,25+a=0,5 \quad\rightarrow\quad a=0,25\\ a+0,25=0,5 \quad\rightarrow\quad a=0,25\end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix}0,5 & 1\\ 0,25 & 0,5\end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ 0,25 & 0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ 0,25 & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ 0,25 & 0,5\end{pmatrix}$$

$$a\cdot A+E\le O \quad\rightarrow\quad a\cdot\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ a & 0,5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}0,5a+1 & a\\ a^2 & 0,5a+1\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 0,5a+1\le 0 \quad\rightarrow\quad a\le -2\\ a\le 0\\ a^2\le 0\\ 0,5a+1\le 0 \quad\rightarrow\quad a\le -2\end{array}\right\} \textit{Widerspruch} \rightarrow \textit{keine Lösung}$$

7.) Inversen zu Matrizen: Bilden Sie jeweils die Inverse zu folgenden Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ t & t^2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ t & 2\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix}1 & 3 & t\\ t & t^2 & 0\\ 1 & 2t & 1\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}1 & 4 & t\\ t & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad K=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -1 & 4 & t\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\frac{1}{t-3}\begin{pmatrix}t & -\frac{3}{t}\\ -1 & \frac{1}{t}\end{pmatrix} \qquad C^{-1}=\frac{1}{1-2t}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -\frac{t}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad D^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$F^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -9 & 8 & 5\end{pmatrix} \qquad G^{-1}=\frac{1}{t^2+t-3}\begin{pmatrix}t & \frac{2t^2-3}{t} & -t^2\\ -1 & \frac{1-t}{t} & t\\ t & \frac{3-2t}{t} & t-3\end{pmatrix}$$

$$H^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t-2} & \frac{2}{2-t} \\ \frac{2}{8-t} & \frac{1}{8-t} & \frac{t+2}{t-8} \\ \frac{1}{t-8} & \frac{3}{t^2-10t+16} & \frac{2-4t}{t^2-10t+16} \end{pmatrix} \qquad K^{-1}=\frac{1}{t+10}\begin{pmatrix} 8 & -2 & t-8 \\ t+2 & 2 & -2t-2 \\ -4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

8.) Gegeben sei das folgende LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ 2t & 1 & 8 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ 1 \\ 2-t \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von **t** hat das LGS

(i) keine Lösungen? (ii) eine Lösung? (iii) unendlich viele Lösungen?

Lösung:

$$Det\begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ 2t & 1 & 8 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix} = 2t^2-8 = 0 \rightarrow t = \pm 2$$

$\rightarrow$ *eindeutige Lösung* $\Leftrightarrow t \in \Re \setminus \{\pm 2\}$ $\qquad \rightarrow$ *keine Lösung* $\Leftrightarrow t = \pm 2$

Probe für $t = \pm 2$ mit Gauß-Verfahren:

$t=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II-4I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{13}II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \textit{Widerspruch wegen II und III}$$

$t=-2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II+4I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -11 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{11}II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \textit{Widerspruch wegen II und III}$$

9.) Gegeben seien die Matrix A_t und der Vektor $\vec{b}_t$

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \Re$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen LGS $A_3 \cdot \vec{x} = \vec{b}_3$.

b) Worin unterscheiden sich homogene und inhomogene LGS?
Nennen Sie zwei Unterschiede!

c) Für welche Werte $t \in \Re$ hat das inhomogene LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$ keine Lösung?

d) Geben Sie eine Lösung für das zugehörige **homogene** LGS $A_1 \cdot \vec{x} = ??$ an.
Wählen Sie dabei y als freie Variable.

Lösung:

hLGS: Ergebnisvektor ist der Nullvektor und es gibt immer mind. eine Lösung.

$$Det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} = (t-1)\cdot t\cdot(t+1) = 0 \rightarrow t = \pm 1 \wedge t = 0$$

$$\rightarrow \textit{eindeutige Lösung} \Leftrightarrow t \in \Re \setminus \{\pm 1; 0\} \qquad \rightarrow \textit{keine Lösung} \Leftrightarrow t \in \{\pm 1; 0\}$$

$$A_3 \cdot (x \quad y \quad z)^T = (-6 \quad 2 \quad 3)^T \rightarrow (x \quad y \quad z)^T = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$$

$$A_1 \cdot (x \quad y \quad z)^T = (0 \quad 0 \quad 0)^T \rightarrow (x \quad y \quad z)^T = \begin{pmatrix} -y & y & -\frac{1}{2}y \end{pmatrix}^T \quad mit\ y \in \Re$$

10.) Gegeben sind die Matrix A_k und der Vektor $\vec{b}_k$ durch

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -k & 3k & k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Determinante von A_k.

b) Für welche Werte von k hat das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b}_k$

(i) keine Lösung? (ii) genau eine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

c) Bestimmen Sie die Lösung für $A_0 \cdot \vec{x} = \vec{b}_0$.

Lösung:

$$Det = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -k & 3k & k \end{pmatrix} = k^2 + 6k = 0 \rightarrow k = -6 \wedge k = 0$$

$\rightarrow$ *eindeutige Lösung* $\Leftrightarrow k \in \Re \setminus \{-6; 0\}$ $\rightarrow$ *keine Lösung* $\Leftrightarrow k = (-6)$

$\rightarrow$ ∞ *– viele Lösung* $\Leftrightarrow k = 0$

Probe für $k = -6$ und $k = 0$ mit Gauß-Verfahren:

$k = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}II} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II+0{,}5I} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Lösung} (x \quad y \quad z)^T = (0{,}5 \quad y \quad 2) \quad mit\ y \in \Re \Leftrightarrow A_0 \cdot \vec{x} = \vec{b}_0$$

$k = -6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -12 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -7 \\ 6 & -18 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{6}I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 0 & -1 & -7 \\ 6 & -18 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[III-6I]{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -4 & -\frac{2}{3} & -\frac{19}{3} \\ 0 & -30 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{19}{12} \\ 0 & -30 & -5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[III+30II]{I-2II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{19}{12} \\ 0 & 0 & 0 & -43{,}5 \end{array}\right) \quad Widerspruch\ wegen\ III$$

Quelle für online-LGS: http://www.juergenmeisel.de/schule_mathe_themen/lin_algebra/lgs/lgs.html

Zusatzaufgabe: Gegeben sind die Matrix C_k und der Vektor $\vec{d}$

$$C_k = \begin{pmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re \qquad \text{und} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Für welchen Wert von k, ist der Vektor $\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine Lösung der Gleichung $C_k \cdot \vec{x} = \vec{d}$?

b) Für welche Werte von k hat das inhomogene LGS $C_k \cdot \vec{x} = \vec{d}$
(i) keine Lösung? (ii) genau eine Lösung? (iii) unendlich viele Lösungen?

c) Geben Sie eine Lösung für das LGS $C_3 \cdot \vec{x} = \vec{d}$

d) Der Vektor $\vec{w}^T$ ist definiert durch: $\vec{w}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_k \cdot C_{-1}$. Ermitteln Sie den Vektor $\vec{w}^T$.

Lösung:

$$Det = \begin{pmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} = k^3 + k^2 - 8k - 12 = 0 \ \rightarrow\ k = -2 \ \wedge\ k = 3$$

$\rightarrow$ *eindeutige Lösung* $\Leftrightarrow k \in \Re \setminus \{-2;3\}$ $\rightarrow$ *keine Lösung* $\Leftrightarrow t = (-2)$

$\rightarrow \infty -$ *viele Lösung* $\Leftrightarrow t = 3$

Probe für $t = -2$ und $t = 3$ mit Gauß-Verfahren:

$t = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2,5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[III-3I]{II+3I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2,5 & 1 & 2 \\ 0 & 8,5 & 5 & 4 \\ 0 & -8,5 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[III+II]{\frac{2}{17}II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2,5 & 1 & 2 \\ 0 & 8,5 & 5 & 4 \\ 0 & -8,5 & -5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[III+II]{\frac{2}{17}II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2,5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{10}{17} & \frac{8}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I-\frac{5}{2}II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{8}{17} & \frac{14}{17} \\ 0 & 1 & \frac{10}{17} & \frac{8}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Lösung} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 14+8z & 8-10z & 17z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad C_3 \cdot \vec{x} = \vec{d}$$

$t = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[III+2I]{II+3I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Widerspruch wegen II und III

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3k-6 & k+2 & 2k-4 \end{pmatrix}$$