Binomischer Lehrsatz und der Beweis

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^{n-0}b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1} + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k\right)$$

2. Möglichkeit: Mit dem Summenausdruck Σ

Induktionsanfang: Für n = 0 gilt

Linke Seite: $(a+b)^0 = 1$ Rechte Seite: $\sum_{k=0}^{0}\left(\binom{0}{k}a^{0-k}\,b^k\right) = \binom{0}{0}a^{0-0}\,b^0 = 1$

Induktionsschritt: *Aus A(n)* $\rightarrow$ *A(n+1)*

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)^n\,(a+b)$$

$$= a\,(a+b)^n + b\,(a+b)^n$$

$$= a \bullet \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k\right) + b \bullet \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{n+1-k}\,b^k\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^{k+1}\right)$$

Indexverschiebung beim 2. Summanden

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{n+1-k}\,b^k\right) + \sum_{k=1}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}\,b^{k+}\right)$$

Der 1.und letzte Summand werden eigens ausgerechnet

$$= \binom{n}{0}a^{n+1}\,b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{n+1-k}\,b^k\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}\,b^k\right) + \binom{n}{n}a^0\,b^{n+1}$$

❶ ❷ ❶

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1}\,b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}\,b^k\right) + \binom{n+1}{n+1}a^0\,b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}\,b^k\right)$$

Hey - don't forget ...

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

❶

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \quad und \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

❷