Lösungen Erwartungswert / Varianz / Standardabweichung => S. 488/489:

10 Erwartungswert und Standardabweichung bei Zufallswerten

Seite 486

Einstiegsproblem

Die Wahrscheinlichkeiten für rot bzw. blau betragen 0,25 bzw. 0,75. Bei Lotterie 1 zahlt man z.B. in 100 Spielen 50€ Einsatz und kann etwa 25-mal 1€ Auszahlung erwarten, d.h., man wird etwa 25€ verlieren. Bei Lotterie 2 zahlt man etwa 25-mal 1€ und erhält etwa 75-mal 0,2€, wird also etwa 10€ verlieren. Lotterie 2 ist zwar günstiger, aber man verliert bei beiden Lotterien.

Seite 488

1 $\mu = (-10)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{2} + 10\cdot\frac{1}{12} = \frac{5}{6}$,

$\sigma^2 = (-10-\mu)^2\cdot\frac{1}{4} + (0-\mu)^2\cdot\frac{1}{6} + (5-\mu)^2\cdot\frac{1}{2}$

$+ (10-\mu)^2\cdot\frac{1}{12} = \frac{1625}{36}$; $\sigma \approx 6{,}7$

2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	0	1	2	3
P(X = k)	11,76%	36,74%	38,23%	13,27%

$\mu = 0{,}3674\cdot1 + 0{,}3823\cdot2 + 0{,}1327\cdot3 = 1{,}53$

Diesen Wert erhält man auch intuitiv als $3\cdot0{,}51$.

$\sigma^2 = 0{,}1176\cdot(0-1{,}53)^2 + 0{,}3674\cdot(1-1{,}53)^2$
$+ 0{,}3823\cdot(2-1{,}53)^2 + 0{,}1327\cdot(3-1{,}53)^2$

$\sigma \approx 0{,}87$

Interpretation:

Für die einzelne Geburt hat der Erwartungswert nur die Bedeutung, dass wohl eher zwei Rüden als nur einer zu erwarten sind. Erst wenn man viele Geburten mit drei Welpen betrachtet, ist die Bedeutung von X, dass man durchschnittlich etwa 1,53 Rüden zu erwarten hat.

Die Standardabweichung zeigt, dass 0 oder 3 Rüdengeburten eher unwahrscheinlich sind.

3 $\mu = 0 \cdot 0{,}436 + 1 \cdot 0{,}413 + 2 \cdot 0{,}132 + 3 \cdot 0{,}0177 + 4 \cdot 0{,}000969 + 5 \cdot 1{,}85 \cdot 10^{-5} + 6 \cdot 7{,}15 \cdot 10^{-8} = 0{,}734$

Man hat durchschnittlich pro Tipp nur etwa 0,7 Richtige zu erwarten.

Der Erwartungswert ist aber nur eine Prognose für den Mittelwert und kennzeichnet nur das, was bei einer großen Anzahl von Spielen auf lange Sicht im Mittel zu erwarten ist.

$\sigma^2 = (0 - 0{,}734)^2 \cdot 0{,}436 + (1 - 0{,}734)^2 \cdot 0{,}413 + (2 - 0{,}734)^2 \cdot 0{,}132 + (3 - 0{,}734)^2 \cdot 0{,}0177 + (4 - 0{,}734)^2 \cdot 0{,}000969 + (5 - 0{,}734)^2 \cdot 1{,}85 \cdot 10^{-5} + (6 - 0{,}724)^2 \cdot 7{,}15 \cdot 10^{-8}$

$\sigma \approx 0{,}76$

Man wird wahrscheinlich nur 0 bis 1 Richtige haben.

4 X: Geldwert der gezogenen Münzen (in Euro)

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	1	1,5	2	2,5	3	4
P(X = k)	22%	20%	$3\frac{1}{3}$%	32%	$13\frac{1}{3}$%	$9\frac{1}{3}$%

$m \approx \mu = 2{,}16;\ \sigma = 0{,}91$

5 a) $\mu = -0{,}3;\ \sigma = 1{,}32$

b) Der Einsatz müsste 0,7€ betragen.

Möglicher Lösungsweg:

Man ersetzt in der Tabelle die Werte wie angegeben;

g	$-e$	$1 - e$	$2 - e$	$5 - e$
P(X = g)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

dabei ist e der gesuchte Einsatz in €. Damit ergibt sich die Gleichung:

$-\frac{2}{3}e + \frac{1}{6}(1 - e) + \frac{1}{10}(2 - e) + \frac{1}{15}(5 - e) = 0$

mit der Lösung $e = 0{,}7$.

c) Die maximale Auszahlung betrage m €, dann muss für m die Gleichung gelten:

$-\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{m-1}{15} = 0$ mit der Lösung $m = 9{,}5$.

6 a) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

r	0	1	2	3
P(X = r)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Erwartungswert:

$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$

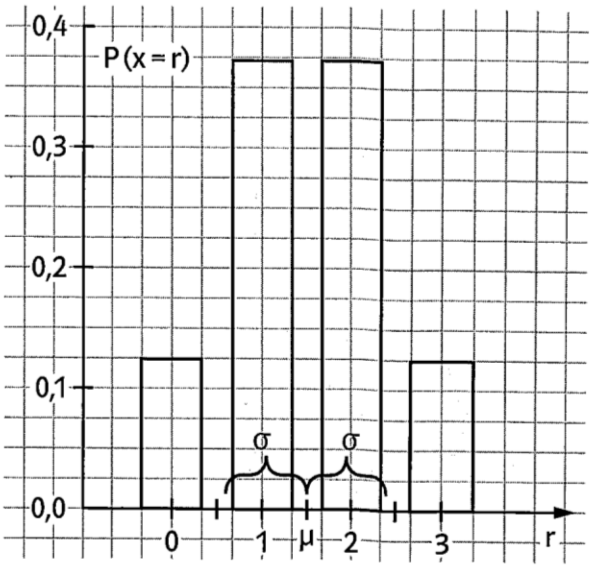
Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{(0 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8}}$

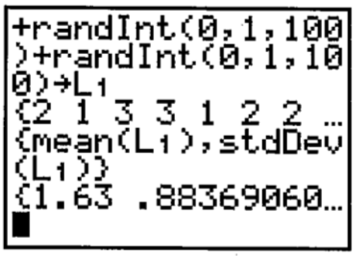
$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

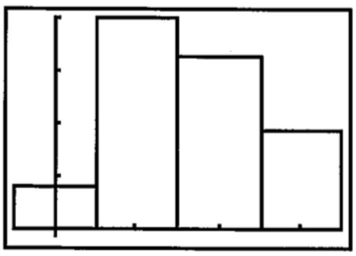
$\approx 0{,}87$

b)



c) (dreimaliges „Werfen“ einer Zufallszahl 0 oder 1, welche Anzahl Wappen simuliert)





```
WINDOW
 Xmin=-.5
 Xmax=3.5
 Xscl=1
 Ymin=-1
 Ymax=40
 Yscl=10
 Xres=■
```

$\overline{x} = 1{,}63$; $s = 0{,}88$
Mittelwert und Erwartungswert sowie die Standardabweichungen liegen nahe beieinander.
Die Graphen ähneln sich auch.
Die Zufallsgröße X modelliert das Zufallsexperiment und ermöglicht Prognosen.

Seite 489

9 a) Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Zufallsversuch (vergleiche Beispiel 1 im Schülerbuch):

Augensumme	2	3	4	5	6	7
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

Augensumme	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße Auszahlungsbetrag X:

a	5	6	7	8	9	15	20	55	120
P(X = a)	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) $\mu = 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{8}{36} + 9\cdot\frac{4}{36}$
$+ 15\cdot\frac{2}{36} + 20\cdot\frac{4}{36} + 55\cdot\frac{2}{36} + 120\cdot\frac{1}{36}$
$\approx 14{,}78$
Die Bank muss mindestens 14,78 Cent verlangen.

10 Man berechnet den Erwartungswert. Aus einem Baumdiagramm ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl X der geheilten Patienten:

g	0	1	2	3
P(X = g)	0,008	0,096	0,384	0,512

Damit ergibt sich:
$E(X) = 0\cdot 0{,}008 + 1\cdot 0{,}096 + 2\cdot 0{,}384 + 3\cdot 0{,}512 = 2{,}4$.
Einfache (intuitive) Alternative: Man erwartet 80 % von 3, d.h. 2,4 geheilte Patienten.

11 Die Mannschaften werden mit A und B bezeichnet. Nach drei Spielen ist Schluss bei Ausgang AAA und BBB (das heißt A bzw. B gewinnt dreimal).
Nach vier Spielen ist Schluss bei Ausgang BAAA, ABAA, AABA beziehungsweise ABBB, BABB, BBAB.
Nach fünf Spielen ist Schluss bei Ausgang BBAAA, BABAA, BAABA, ABBAA, ABABA, AABBA beziehungsweise AABBB, ABABB, ABBAB, BAABB, BABAB, BBAAB.
Daher hat die Zufallsvariable X (Anzahl der Spiele) die Verteilung

s	3	4	5
P(X = s)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

und den Erwartungswert
$\mu = 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{3}{8} + 5\cdot\frac{3}{8} = \frac{33}{8} \approx 4{,}125$
sowie die Standardabweichung $\sigma = 0{,}78$.

12 Wahrscheinlichkeitsverteilung für „Gewinn in Dollar“:

g	−1	0	1	2
P(X = g)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Auf lange Sicht entspricht der Gewinn dem Erwartungswert
$\mu = \frac{125}{216}\cdot(-1\$) + \frac{75}{216}\cdot 0\$ + \frac{15}{216}\cdot 1\$ +$
$\frac{1}{216}\cdot 2\$ = -\frac{108}{216}\$ = -0{,}50\$$.
Daher kann der Spieler durchschnittlich pro Spiel 50 Cent Verlust erwarten.

13 X: Gewinn in €

a) Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

g	1000	300	20	0
P(X = g)	0,0001	0,0004	0,0020	0,9975

$\mu = 0{,}62\,€$; $\sigma = 14{,}7\,€$

b) Es sei x die Anzahl der erforderlichen Lösungen.

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

g	1000	300	20	0
P(X = g)	$\frac{1}{x}$	$\frac{4}{x}$	$\frac{200}{x}$	$\frac{x-205}{x}$

$E(X) = \frac{1000}{x} + \frac{1200}{x} + \frac{4000}{x} = \frac{6200}{x} = 0{,}45.$

Somit ist $x \approx 13\,778$.

Es müssten etwa 13 800 Lösungen eingehen.