

Themen: Mehrstufige Produktion; Stochastische Matrizen; Stat. GG

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1:

30

Die Unternehmung Armes Brot AG verarbeitet die Materialien R_1 , R_2 und R_3 zu den Zwischenprodukten Z_1 , Z_2 und Z_3 und diese Zwischenprodukte zu den Endprodukten E_1 , E_2 und E_3 .

Die folgenden Matrizen stellen die Stücklisten bzw. Materialverflechtungen dar.

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Wie viele Materialien werden pro Endprodukt gebraucht?

Zusatzauftrag: Zeigen Sie, dass die Zeilensummen der Ergebnismatrix dem Vektor (44 48 29) entsprechen.

b) Die Firma erhält einen Auftrag vom Umfang (10 25 20).

Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt (200 100 85).

Prüfen Sie, ob der vorhandene Bestand genügt bzw. ob nachbestellt werden muss.

c) Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt nun (130 70 60).

Unser Chef Rudi Nutzlos will nun wissen, wie viele Endprodukte wir herstellen können, wenn wir unser Zwischenproduktlager komplett leeren würden.

Die Kosten bzw. Verkaufspreise seien durch folgende Vektoren gegeben:

Kosten Materialien: $\vec{k}_R = [10 \ 15 \ 20]$

Kosten Zwischenproduktproduktion: $\vec{k}_Z = [80 \ 100 \ 120]$

Kosten Endproduktmontage: $\vec{k}_E = [410 \ 510 \ 620]$

d) Berechnen Sie die **Material**gesamtkosten für jedes einzelne Endprodukt.

e) Berechnen Sie die Gesamtkosten, wenn die Fixkosten 123.000,00 € betragen und ein Auftrag von $\vec{e} = [100 \ 150 \ 200]$ angenommen werden soll.

Anmerkung: $\vec{K}_{\text{var}} = \vec{k}_R \cdot M_{RE} + \vec{k}_Z \cdot M_{ZE} + \vec{k}_E$

71

$$a) \pi_{ZZ} \cdot \pi_{ZE} = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$b) \pi_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175 \\ 100 \\ 85 \end{pmatrix}$$

Bestand genügt zur Erfüllung des Auftrags

$$\begin{array}{l} c) \text{ I } 1 \quad 2 \quad 2 \quad | \quad 70 \quad \text{II} - 2\text{I} \\ \text{II} 2 \quad 3 \quad 4 \quad | \quad 130 \quad \rightarrow \\ \text{III} 2 \quad 1 \quad 2 \quad | \quad 60 \quad \text{III} - 2\text{I} \\ \hline \text{I} 1 \quad 2 \quad 2 \quad | \quad 70 \\ \text{II} 0 \quad -1 \quad 0 \quad | \quad -10 \quad \rightarrow y = 10 \quad \text{I} + 2\text{II} \\ \text{III} 0 \quad -3 \quad -2 \quad | \quad -80 \quad \rightarrow (-1) \cdot \text{II} \\ \hline \text{I} 1 \quad 0 \quad 2 \quad | \quad 50 \quad \rightarrow x = 0 \\ \text{II} 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 10 \\ \text{III} 0 \quad 0 \quad -2 \quad | \quad -50 \quad \rightarrow z = 25 \end{array} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

d) Materialkosten

$$K_{\text{mat}} = (10 \quad 15 \quad 20) \cdot \begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$K_{\text{mat}} = (490 \quad 530 \quad 720)$$

$$e) \text{ ZP-Kosten: } (80 \quad 100 \quad 120) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (500 \quad 560 \quad 760)$$

$$K_{\text{var/ges}} = (1400 \quad 1600 \quad 2100) \rightarrow \cdot \vec{e} \oplus K_{\text{fix}}$$

$$K_{\text{ges}} = 800.000 + 123.000 = 923.000 \text{ [€]}$$

Aufgabe 2: Stochastische Matrizen; Übergänge und Statisches Gleichgewicht

20

Das Fitnessstudio „Gaggis Mucki-Fit“

Das neu eröffnete Fitnessstudio Gaggis Mucki-Fit hat durch das Angebot eines kostenlosen Probemonats eine große Anzahl von Kunden für seine Kursangebote (S)tepparobic, (W)irbelsäulengymnastik und (M)odern Dance gewinnen können.

Die Kurse finden parallel statt und dürfen im Wochenrhythmus gewechselt werden.

Die Kurswahl bzw. das Wechselverhalten gestaltet sich wie folgt:

$$U = \begin{pmatrix} 0,1 & b & c \\ a & 0,1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} \quad \text{Spalten-/Zeilenfolge: S - W - M}$$

Man kann davon ausgehen, dass jeder Kunde wöchentlich an einem der drei Kurse teilnimmt und das Wahlverhalten über den Betrachtungszeitraum unverändert bleiben wird.

In der **zweiten** Woche erfolgt folgende Kursbelegung:

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ w_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,7 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Aufteilung für die 3. Woche.
- Prüfen Sie, ob mit diesen Daten eine Berechnung der Aufteilung für die 1. Woche möglich ist und ermitteln Sie diese oder begründen Sie, worin der Widerspruch liegt.
- Der Kurs (W)irbelsäulengymnastik wird durch (Y)oga ersetzt.
Nach einigen Wochen stellt sich folgende **stationäre** Verteilung ein:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} s \\ y \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

Die neue Übergangsmatrix hat nun folgende Form:

$$U_{\text{neu/Yoga}} = \begin{pmatrix} a & b & 0,3 \\ c & d & e \\ 0,1 & 0,1 & f \end{pmatrix} \quad \text{Spalten-/Zeilenfolge: S - Y - M}$$

Bestimmen Sie die Werte der Koeffizienten a bis f unter der zusätzlichen Bedingung, dass der Anteil der Yoga-Kursteilnehmer von Woche zu Woche immer 70 % beträgt.

72

$$U = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

a) $U \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,7 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0,18 \\ 0,50 \end{pmatrix}$

b)

	x	y	z	b	
I	1	4	2	2	II - 3I
II	3	1	5	7	→
III	6	5	3	1	III - 6I
<hr/>					
I	1	4	2	2	(-1) II
II	0	-11	-1	1	→
III	0	-15	-9	-11	
<hr/>					
I	1	4	2	2	I - 2II
II	0	11	1	-1	→
III	0	-15	-9	-11	III + 9II
<hr/>					
I	1	-18	0	4	
II	0	11	1	-1	
III	0	84	0	-20	↯

keine L möglich, da $y < 0$

c) $d = 0,7 \rightsquigarrow b = 0,2$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0,3 \\ c & 0,7 & e \\ 0,1 & 0,1 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

I.) $0,3a + 0,6 \cdot 0,2 + 0,03 = 0,3 \rightsquigarrow 0,3a + 0,12 = 0,27$

$a = 0,5$

II.) $0,3c + 0,42 + 0,1e = 0,6$

III.) $0,03 + 0,06 + 0,1f = 0,1 \rightsquigarrow 0,1f = 0,01$

$f = 0,1 \rightsquigarrow e = 0,6$
 $c = 0,4$

⊕ Spaltensummen $\Sigma 1$