13. Jgst./Kurs M LK 2	**3. Test**	**Datum: 11.11.2020**
Fach: Mathematik (Leistungsfach)		

Name:	
Punkte:	Note:

Themen: Baumdiagramm; Pfadregeln; Bed. W'keit; Satz von Bayes

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

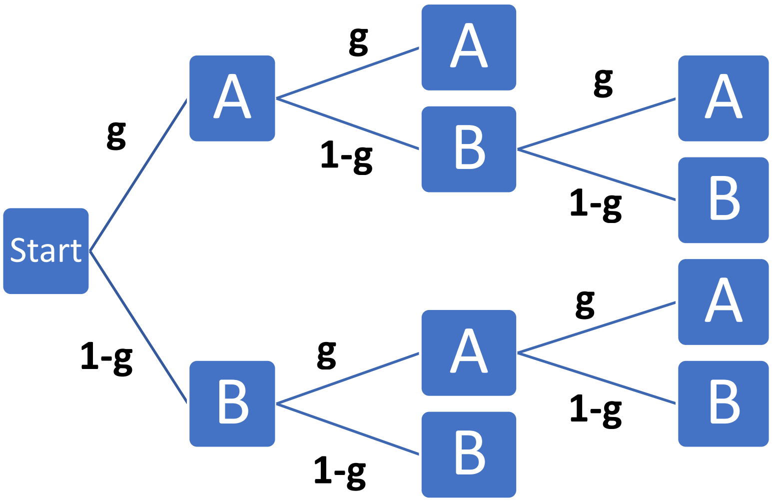
Aufgabe 1: **12**

In einem Wettbewerb kommt diejenige Mannschaft in die nächste Runde, die zuerst zwei Spiele gewonnen hat.

a) Zeichnen Sie hierfür ein Baumdiagramm mit allen möglichen Ausgängen, wobei Team A ein Einzelduell mit einer Wahrscheinlichkeit von g gewinnt.

b) Begründen Sie, warum die Gewinnwahrscheinlichkeit von Team A mit Hilfe folgender Funktion darstellbar ist: $p(g) = 3g^2 - 2g^3$ mit $g \in [\,0\,;1\,]$

Lösung:



3 Pfade führen zum Sieg für Team A: Pfadregel 1

Pfad 1: A – A => $p(A,A) = g^2$

Pfad 2: A – B – A => $p(A,B,A) = g \cdot (1-g) \cdot g = g^2(1-g)$

Pfad 3: B – A – A => $p(B,A,A) = (1-g) \cdot g \cdot g = g^2(1-g)$

Zusammenfassung der Pfade durch Addition: Pfadregel 2

$$p(A\ gewinnt) = g^2 + 2g^2(1-g) \overset{ausmultipliziert}{=} g^2 + 2g^2 - 2g^3 \overset{zusammengefasst}{=} 3g^2 - 2g^3$$

Aufgabe 2: **8**

In einem Gefäß sind 6 rote und **n blaue** Kugeln. Es werden 2 Kugeln ***<u>ohne Zurücklegen</u>*** gezogen.

Wie viele blaue Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(\text{"}h\ddot{o}chstens\ eine\ Kugel\ rot\text{"}) = \frac{2}{3}$$

Lösung:

$$P(\text{"höchstens eine Kugel rot"})=\frac{2}{3}\xrightarrow{\text{Gegenwahrscheinlichkeit}}P(\text{"zwei Kugeln rot"})=\frac{1}{3}$$

$$P(r,r)\;=\;\frac{6}{6+n}\cdot\frac{5}{5+n}\;=\;\frac{30}{30+11n+n^2}\;=\;\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow\;90\;=\;30+11n+n^2\;\rightarrow\;n^2+11n-60\;=\;0\;\rightarrow\;n_{1/2}=\frac{-11\pm\sqrt{121+240}}{2}=\frac{-11\pm\sqrt{361}}{2}$$

$$\rightarrow\;n_1=\frac{-11+19}{2}\;\;und\;\;n_2=\frac{-11-19}{2}\;\rightarrow\;n_1=4\;\;und\;\;n_2=-15\,[nicht\ def.]$$

Aufgabe 3:

24	

a) Ergänzen Sie die vorliegende unvollständige Vierfeldertafel.

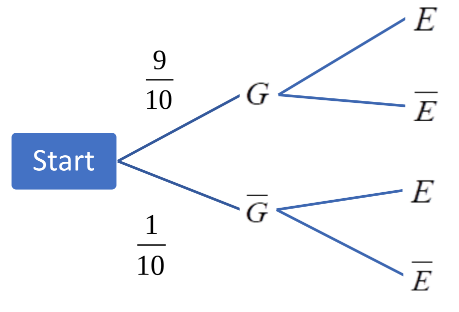
Lösung:

	erkrankt = $P(E)$	**Nicht erkrankt =** $P(\overline{E})$	**Summe**
geimpft = $P(G)$	**10**	**170**	**180**
Nicht geimpft = $P(\overline{G})$	**0**	**20**	**20**
Summe	**10**	**190**	**200**

b) Bestimmen die relativen Häufigkeiten.

	erkrankt = $P(E)$	**Nicht erkrankt =** $P(\overline{E})$	**Summe**
geimpft = $P(G)$	$\frac{10}{200}$	$\frac{170}{200}=\frac{17}{20}$	$\frac{180}{200}=\frac{9}{10}$
Nicht geimpft = $P(\overline{G})$	$\frac{0}{200}=0$	$\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$
Summe	$\frac{10}{200}=\frac{1}{20}$	$\frac{190}{200}=\frac{19}{20}$	$\frac{200}{200}=1$

c) Stellen Sie die Zusammenhänge in einem Baumdiagramm mit der **Stufe 1 geimpft/nicht geimpft** dar.



$P(G)\cdot P_G(E)=P(G\cap E)\rightarrow\frac{9}{10}\cdot P_G(E)=\frac{1}{20}\rightarrow P_G(E)=\frac{1}{18}$
$P_{\overline{G}}(E)=\frac{17}{18}$
$P(\overline{G})\cdot P_{\overline{G}}(E)=P(\overline{G}\cap E)\rightarrow\frac{1}{10}\cdot P_{\overline{G}}(E)=0\rightarrow P_{\overline{G}}(E)=0$
$P_{\overline{G}}(\overline{E})=1$

d) Bestimmen Sie folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten:
Wahrscheinlichkeit, dass eine geimpfte Person trotzdem erkrankt

$$P_G(E) = \frac{P(G \cap E)}{P(G)} \rightarrow P_G(E) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{18}$$

e) Prüfen Sie, ob die Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

E und G sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(E) \cdot P(G) = P(G \cap E)$

$$P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{20} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{200} \xleftrightarrow{versus} P(G \cap E) = \frac{1}{20} \rightarrow \textit{stochastisch abhängig}$$

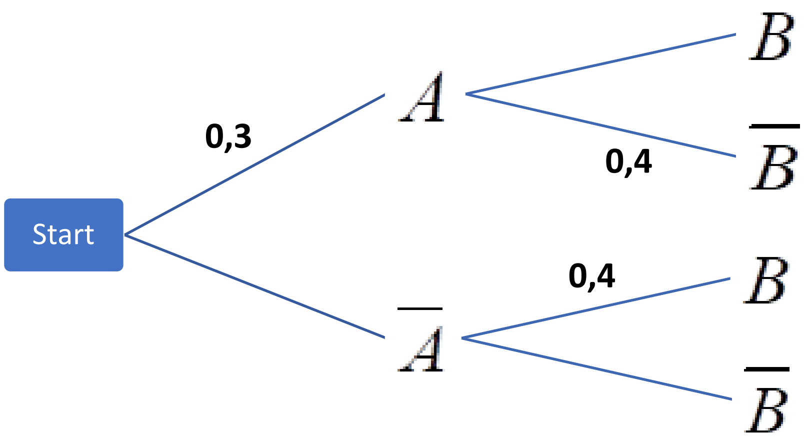
f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $P(G \cup \overline{E})$?

Gemäß Additionssatz gilt:

$$P(G \cup \overline{E}) = P(G) + P(\overline{E}) - P(G \cap \overline{E}) \rightarrow P(G \cup \overline{E}) = \frac{9}{10} + \frac{19}{20} - \frac{17}{20} = 1$$

Aufgabe 4: **16**

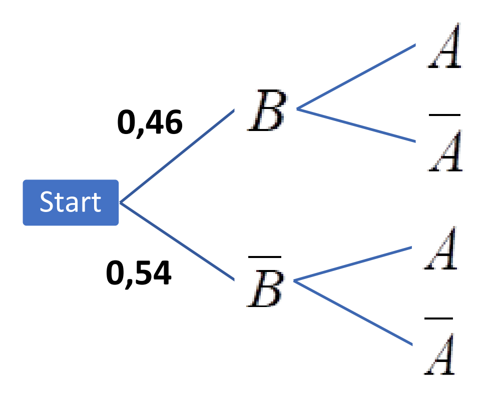
Gegeben sei das folgende unvollständige Baumdiagramm.



Erstellen Sie das **<u>umgekehrte Baumdiagramm</u>** und die **<u>zugehörige Vierfeldertafel</u>**.

Lösung:

	$P(A)$	$P(\overline{A})$	**Summe**
$P(B)$	$0,3 \cdot 0,6 = 0,18$	$0,7 \cdot 0,4 = 0,28$	**0,46**
$P(\overline{B})$	**0,12**	**0,42**	**0,54**
Summe	**0,3**	**0,7**	**1**

	$P(B)\cdot P_B(A)=P(B\cap A)\rightarrow 0{,}46\cdot P_B(A)=0{,}18\rightarrow P_B(A)=\frac{9}{23}$
	$P_B(\overline{A})=\frac{14}{23}$
	$P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)=P(\overline{B}\cap A)\rightarrow 0{,}54\cdot P_{\overline{B}}(A)=0{,}12\rightarrow P_{\overline{B}}(A)=\frac{2}{9}$
	$P_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{7}{9}$

Aufgabe 5: Laptops im Test | **10** | |

Der vollgeladene Akku eines Laptops hält im Durchschnitt 300 Minuten.

Die Akku-Module wurden in verschiedenen Ländern hergestellt.

China: 40 % - Indien: 25 % - Thailand: 30 % - Myanmar: Rest

Allerdings ist die Verarbeitung bei den Hersteller-Ländern von unterschiedlicher Qualität, so dass nicht alle Produkte verkauft werden können.

Die Quote der Fehlerhaftigkeit in den einzelnen Ländern ist wie folgt:

China: 8 % - Indien: 10 % - Thailand: 9 % - Myanmar: 12 %

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt einwandfrei?

Lösung:

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{"einwandfrei"}) \;=\; 0{,}4\cdot 0{,}92+0{,}25\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}91+0{,}05\cdot 0{,}88 \;=\; 0{,}91$$

$$P(\text{" fehlerhaft"}) \;=\; 1-0{,}91 \;=\; 0{,}09$$

b) Bei der Qualitätskontrolle wird ein fehlerhafter Akku gefunden.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er aus Indien?

Lösung:

Satz von Bayes:

$$P_{(\text{" fehlerhaft"})}(\text{"Indien"}) \;=\; \frac{P(\text{" fehlerhaft"}\cap\text{"Indien"})}{P(\text{" fehlerhaft"})} \;\rightarrow\; P_{(\text{" f "})}(\text{"I"}) \;=\; \frac{0{,}1\cdot 0{,}25}{0{,}09} \;=\; 0{,}278$$

Zusatzfragen:

Wo liegt Myanmar und welches war der ehemalige Staatenname?

Myanmar hieß früher Birma/Burma; die größte Stadt des Landes ist Yangon (Rangun) mit rund 5.160.000 Einwohnern (2014). Rangun war früher auch die Hauptstadt von Myanmar (seit 2005 ist Naypyidaw die Hauptstadt). Die Lage: südlich von China, östlich von Indien und westlich von Thailand in Ostasien


MONGOLIA
CHINA
JAPAN
North Pacific Ocean
INDIA
BURMA
THAILAND
PHILIPPINES
INDONESIA
SRI LANKA
Indian Ocean