12. Jgst.	**Mathematik / Leistungsfach**	**KA3_LKM 12/2 Pi/Mei**
Klasse: BGY18	**3. Kursarbeit**	**Datum: 10.03.2020**
Name:	**Rohpunkte: 135**	**Notenpunkte:**

Notieren Sie sämtliche Ansätze und Nebenrechnungen auf Ihren Bearbeitungsblättern!
Nummerieren Sie alle Seiten! Geben Sie Ihre Blätter in einer sinnvollen Ordnung ab!

Aufgabe 1: Funktionenschar ganzrationale Funktionen **54 [2 - 4 – 6 – 7 – 7 – 5 – 7 – 3 – 6 – 7]**

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{3}{k}x^2 \quad mit\ x \in \Re \quad und\ k > 0$

a) Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Symmetrie.

Lösung: keine Symmetrie wegen gerader und ungerader Exponenten

$$f_k(-x) \neq f_k(x) \quad und \quad f_k(-x) \neq -f_k(x)$$

b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionenschar $f_k(x)$

Lösung:

$$f_k(x) = \left(\frac{1}{k^2}x - \frac{3}{k}\right)x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad und \quad \left(\frac{1}{k^2}x - \frac{3}{k}\right)x^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad x = 0\,[doppelt] \quad und \quad x = 3k$$

c) Zeigen Sie, dass die 2. Ableitung folgende Form haben kann: $f_k''(x) = \frac{6}{k^2}(x-k)$

Lösung:

$$f_k'(x) = \frac{3}{k^2}x^2 - \frac{6}{k}x \quad und \quad f_k''(x) = \frac{6}{k^2}x - \frac{6}{k} \overset{ausklammern}{=} \frac{6}{k^2}(x-k)$$

d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte der Scharkurven.
Lösung:

$$f_k'(x) = \frac{3}{k^2}x^2 - \frac{6}{k}x = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3}{k^2}x - \frac{6}{k}\right)x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\ und\ x_2 = 2k$$

$$f_k''(0) = \frac{6}{k^2}(-k) = -\frac{6}{k} \underset{wegen\ k>0}{<} 0 \quad \rightarrow \quad Max(0 \mid 0)$$

$$f_k''(2k) = \frac{6}{k^2}(2k-k) = \frac{6}{k} \underset{wegen\ k>0}{>} 0 \quad \rightarrow \quad Min(2k \mid f(2k)) = Min(2k \mid -4k)$$

e) Begründen Sie, dass die Ortskurven der Wendepunkte und der Extrema identisch sind.
Lösung:

Ortskurve Extrema: $x_2 = 2k \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}x \quad \rightarrow \quad y = -4k \overset{k=\frac{1}{2}x}{=} -4 \cdot \frac{1}{2}x = -2x$

Ortskurve Wendpunkte:

$$f_k''(x) = \frac{6}{k^2}(x-k) = 0 \rightarrow x = k$$

$$f_k'''(x) = \frac{6}{k^2} \rightarrow f_k'''(k) = \frac{6}{k^2} \neq 0 \rightarrow WP\ existiert$$

$$\xrightarrow{k=x \text{ in Funktion}} f_{k=x}(x) = \frac{1}{x^2}x^3 - \frac{3}{x}x^2 = x - 3x = -2x$$

Dies zeigt die Gleichheit der Ortskurven.

f) Für welche Werte des Parameters k verläuft der Graph der Funktion durch den Punkt $P(5 \mid -10)$?
Lösung:

$$f_k(5) = \frac{1}{k^2}5^3 - \frac{3}{k}5^2 = -10 \quad \rightarrow \quad \frac{125}{k^2} - \frac{75}{k} = -10$$

$$\xrightarrow[+10k^2]{\cdot k^2} 10k^2 - 75k + 125 = 0 \quad \rightarrow \quad k_{1/2} = \frac{75 \pm \sqrt{5626-5000}}{20} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{quadr. Gleichung}]{\text{Lösung}} k_1 = 2{,}5 \quad und \quad k_2 = 5$$

g) Erläutern Sie, warum die Funktion mit ihrer 1. Ableitung für alle k > 0 immer genau drei Schnittpunkte hat.
Lösung:

$$Ansatz: \quad f_k(x) = f_k'(x) \rightarrow \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{3}{k}x^2 = \frac{3}{k^2}x^2 - \frac{6}{k}x \rightarrow \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{3}{k}x^2 - \frac{3}{k^2}x^2 + \frac{6}{k}x = 0$$

$$\xrightarrow{x \text{ faktorisiert}} \left[\frac{1}{k^2}x^2 - \left(\frac{3}{k} + \frac{3}{k^2}\right)x + \frac{6}{k}\right]x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\frac{1}{k^2}x^2 - \left(\frac{3}{k} + \frac{3}{k^2}\right)x + \frac{6}{k} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot k^2} \quad x^2 - (3k+3)x + 6k = 0$$

$$\xrightarrow{\text{quadr. Gleichung}} x_{2/3} = \frac{3k+3 \pm \sqrt{(3k+3)^2 - 24k}}{2} = \frac{3k+3 \pm \sqrt{9k^2 - 6k + 9}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{Prüfung Diskriminante}} 9k^2 - 6k + 9 > 0 \text{ für alle k } \in \Re$$

Begründung: Nach oben geöffnete Parabel ohne Nullstellen; Min. bei k = $\frac{1}{3}$

Sei für die folgenden Fragestellungen k = 2:

h) Welche Steigung besitzt die Funktion an der Stelle x = -2?

Lösung: $$f_2'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x \quad\rightarrow\quad f_2'(-2)=\frac{3}{4}\cdot 4-3\cdot(-2)=9=m$$

i) Bestimmen Sie die beiden Tangenten an den Stellen der Funktion mit der Steigung m = 9.

Lösung:

Tangente 1:

$$f_2(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2 \quad\rightarrow\quad f_2(-2)=\frac{1}{4}\cdot(-8)-\frac{3}{2}\cdot 4=(-8)$$

$$\xrightarrow[aus:\,t(x)=mx+c]{Berechnung\ c} (-8)=9\cdot(-2)+c \quad\rightarrow\quad c=10 \quad\rightarrow\quad t(x)=9x+10$$

2. Stelle der Funktion mit der Steigung m = 9:

$$f_2'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x=9 \quad\rightarrow\quad \frac{3}{4}x^2-3x-9=0 \quad\rightarrow\quad x_2=6$$

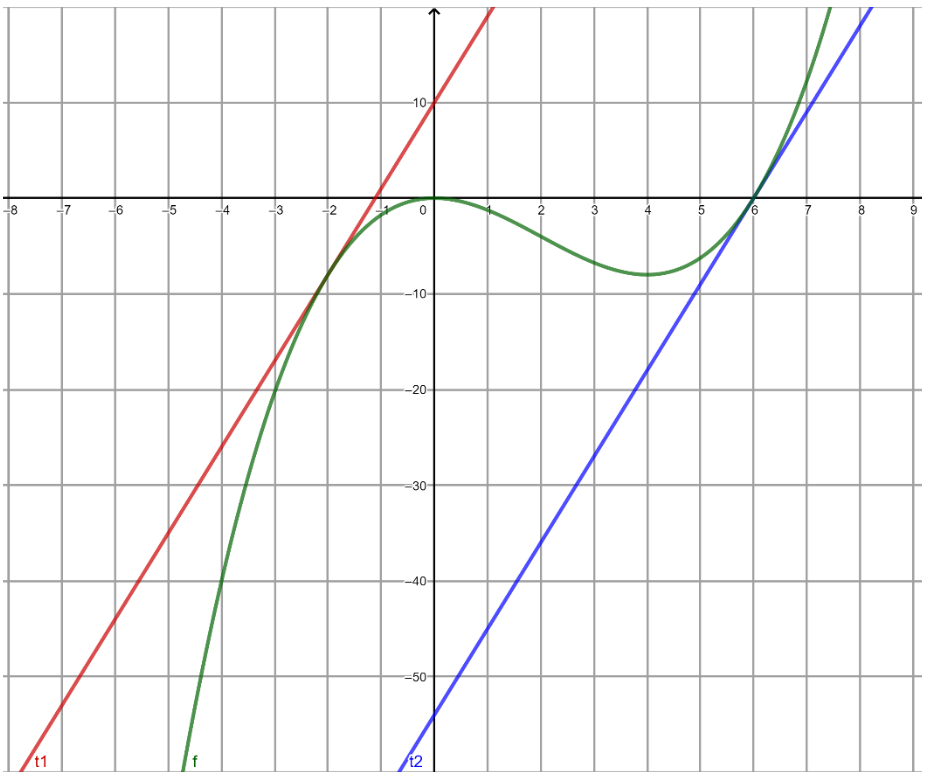
Tangente 2:

$$f_2(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2 \quad\xrightarrow[x=3k]{Nullstelle}\quad f_2(6)=0$$

$$\xrightarrow[aus:\,t(x)=mx+c]{Berechnung\ c} 0=9\cdot 6+c \quad\rightarrow\quad c=-54 \quad\rightarrow\quad t(x)=9x-54$$

j) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Funktion und die Tangenten mit der Steigung m = 9 in das KO-System in der Anlage.

Lösung:



Aufgabe 2: Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen	28[10 - 8 - 10]

Teil 1:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Punkt $P(0 \mid 11)$.

Die Wendetangente im Wendepunkt $W(1 \mid 0)$ ist parallel zur Geraden $f(x) = -12x$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

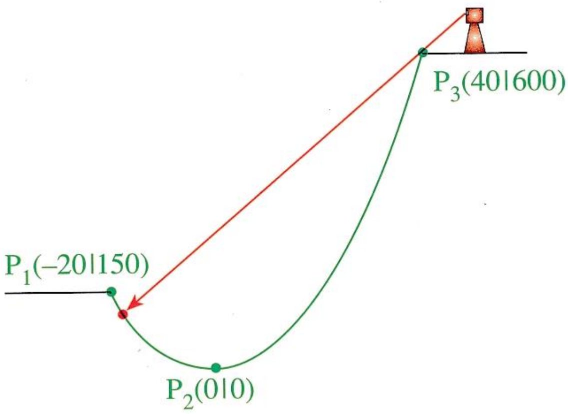
$$\left.\begin{array}{lll} I.) & f(0) = d = 11 \\ II.) & f'(1) = 3a + 2b + c = -12 \\ III.) & f''(1) = 6a + 2b = 0 \\ IV.) & f(1) = a + b + c + d = 0 \end{array}\right\} \quad a = 1 \quad b = -3 \quad c = -9 \quad d = 11$$

$$\rightarrow \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$$

Teil 2:

Eine Talsenke hat die Form einer quadratischen Parabel.

Beschreiben Sie den Verlauf der Senke durch eine geeignete quadratische Funktion.



Lösung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f'(x) = 2ax + b$$

$$\left.\begin{array}{lll} I.) & f(0) = c = 0 \\ II.) & f'(0) = b = 0 \\ III.) & f(40) = 1600a + 40b + c = 600 \\ IV.) & f(-20) = 400a - 20b + c + d = 150 \end{array}\right\} \quad a = \frac{3}{8} \quad b = 0 \quad c = 0$$

$$\rightarrow \quad f(x) = \frac{3}{8}x^2$$

Zusatzaufgabe [5]:
5 m vom rechten Rand der Senke wird ein 45 m hoher Aussichtsturm gebaut.
Bis zu welchem Punkt ist die Senke von oben einsehbar?
Lösung:

$$\text{Gerade aus } P_3(40 \mid 600) \text{ und } Q(45 \mid 645): \quad m = \frac{45}{5} = 9 \quad \rightarrow \quad t(x) = 9x + 240$$

$$\text{Schnittpunkt}:$$

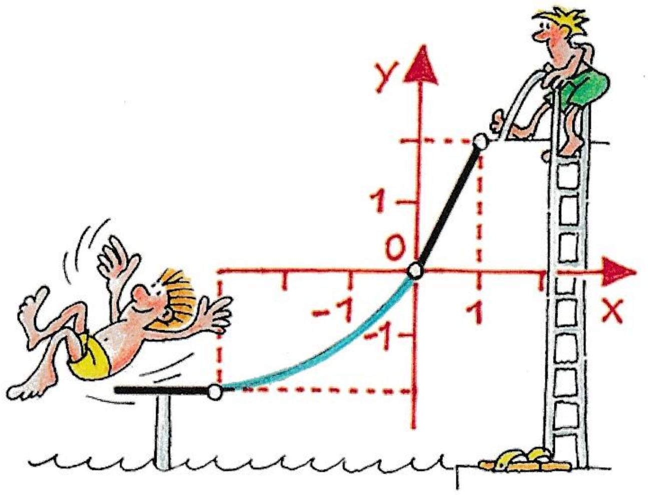
$$f(x) = t(x) \rightarrow \frac{3}{8}x^2 = 9x + 240 \rightarrow \frac{3}{8}x^2 - 9x - 240 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 40 \quad \text{und} \quad x_2 = -16 \quad \rightarrow \quad S(-16 \mid 96)$$

Teil 3:
Aus drei Blechteilen soll eine Rutschbahn für das Badeparadies Plantschi entsprechend der Abbildung zusammengesetzt werden.

Für das gebogene Stück, das ohne Knick an die geraden Teile anschließt, soll ein Konstruktionsplan erstellt werden.

Bestimmen Sie die Gleichung der Polynomfunktion 3. Grades, deren Graph passend geformt ist.



Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left.\begin{array}{lll} I.) & f(0) = d = 0 \\ II.) & f'(0) = c = 2 \\ III.) & f(-3) = -27a + 9b - 3c + d = -2 \\ IV.) & f'(-3) = 27a - 6b + c = 0 \end{array}\right\} \quad a = \frac{2}{27} \quad b = \frac{2}{3} \quad c = 2 \quad d = 0$$

$$\rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 2x$$

Aufgabe 3: Extremwertaufgabe	**28 [10 - 18]**

Teil 1: Produkte und Summen

Die Zahl 60 soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass das Produkt aus dem ersten Summanden und dem Quadrat des zweiten Summanden maximal wird.
Welche Werte haben die beiden Summanden?

Lösung:

$$Nebenbedingung: \quad x+y=60 \quad \rightarrow \quad y=60-x \quad mit\ D=[0;60]$$

$$Zielfunktion:$$

$$f(x,y) = x\cdot y^2 \xrightarrow{y=60-x} f(x) = x\cdot(60-x)^2 = x^3-120x^2+3600x$$

$$f'(x) = 3x^2-240x+3600 = 0$$

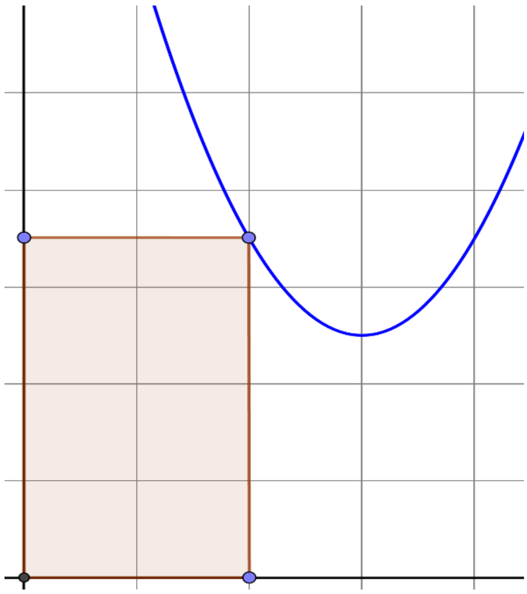
$$\rightarrow x_1=60 \quad und \quad x_2=20 \quad \rightarrow \quad Summanden: \quad 20\ und\ 40$$

$$f''(x) = 6x-240 \quad \rightarrow \quad f''(20) = -120<0 \quad \rightarrow \quad Max.$$

Teil 2: Flächenmaximierung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-3)^2+2{,}5$

Betrachtet werden sollen nun alle achsenparallele Rechtecke mit dem Ursprung als Eckpunkt und einem Punkt auf dem Graphen von $f(x)$ als gegenüber liegendem Eckpunkt.



a) Der Definitionsbereich soll wie folgt lauten:

$$D = (0; x_{Minimum}]$$

Begründen Sie, weshalb die Untergrenze des Def.-Bereichs offen sein sollte.

Berechnen Sie die Obergrenze des Def.-Bereichs.

Lösung:
Die Untergrenze sollte offenbleiben, da sonst keine Fläche berechenbar wäre, denn die Breite des Rechtecks wäre sonst 0.

Obergrenze des Definitionsbereichs: Ermittlung des Minimums der Randfunktion f(x)

$$f'(x) = 2(x-3)=0 \quad \rightarrow \quad x=3 \quad und \quad f''(x) = 2>0 \quad \rightarrow \quad Min.$$

b) Erläutern Sie, dass für die Zielfunktion gilt: $a(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{23}{2}x$

Lösung:

Zielfunktion der Fläche: $a(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \left[(x-3)^2 + 2{,}5\right] = x^3 - 6x^2 + \frac{23}{2}x$

c) Berechnen Sie die Seitenlänge desjenigen Rechtecks, dessen Fläche maximal wird.
Prüfen Sie, soweit sinnvoll, die Randbedingung(en).

Geben Sie die Maßzahl des maximalen Flächeninhalts $A_{\max}$ an.

Lösung:

$$a(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{23}{2}x \quad \rightarrow \quad a'(x) = 3x^2 - 12x + \frac{23}{2} = 0$$

$$\rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-138}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{6}}{6} = 2 \pm \frac{1}{6}\sqrt{6}$$

$$\rightarrow \quad x_1 = 2{,}408 \quad und \quad x_2 = 1{,}592$$

$$\rightarrow \quad a''(x) = 6x - 12 \quad \rightarrow \quad a''(1{,}592) < 0 \quad \rightarrow \quad Max.$$

$$\max .\, Fläche:$$

$$a(1{,}592) = 1{,}592^3 - 6 \cdot 1{,}592^2 + \frac{23}{2} \cdot 1{,}592 \approx 7{,}14$$

$$Randextrema:$$

$$f(3) = 2{,}5 \quad \rightarrow \quad Fläche: 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$$

Ergebnis:
Das Ergebnis der Differentialrechnung ergibt ein lokales Extremum, allerdings ist das Randextremum größer als der Funktions-/Flächenwert des lokalen Extremums;

Wählen Sie aus den beiden folgenden Aufgaben 4 und 5 genau eine aus und bearbeiten Sie diese komplett. Eine jeweilige Teilauswahl aus beiden Aufgaben ist nicht zulässig!

Aufgabe 4: Ableitungen – Funktionen – Stammfunktionen - Integralrechnung	**25 [6 – 4 – 6 – 9]**

Füllen Sie die Tabelle aus:

Aufg.	**1. Ableitung f'(x)**	**Funktion f(x)**	**Stammfunktion F(x)**
a)	$6x-1$	$f(x)=3x^2-x$	$x^3-\frac{1}{2}x^2+c$
b)	$\frac{12}{x^4}-20x^3$	$-\frac{4}{x^3}-5x^4$	$F(x)=\frac{2}{x^2}-x^5$
c)	$f'(x)=\frac{5}{2}x^4+4x^2$	$\frac{1}{2}x^5+\frac{4}{3}x^3+c$	$\frac{1}{12}x^6+\frac{1}{3}x^4+cx+d$

d) Berechnen Sie den Integralwert und den Flächeninhalt A den der Graph der Funktion $f(x)=x^2-3x$ im Intervall [-2 ; 3] mit der x-Achse einschließt.

Erläutern Sie, warum Sie [hoffentlich 😉] zwei verschiedene Ergebnisse erhalten.

Lösung:

$$Integralwert:$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)=\int_{-2}^{3}\left(x^2-3x\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{3}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot 27-\frac{3}{2}\cdot 9\right)-\left[\frac{1}{3}\cdot(-8)-\frac{3}{2}\cdot 4\right]=-\frac{9}{2}-\left(-\frac{8}{3}-6\right)$$

$$=-\frac{9}{2}+\frac{26}{3} \quad = \quad -\frac{27}{6}+\frac{52}{6} \quad = \quad \frac{25}{6} \quad \approx \quad 4{,}17$$

Flächenwert :

$(1)\quad \textit{Nullstellen}: \quad x^2 - 3x = 0 \rightarrow (x-3)x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad \textit{und} \quad x_2 = 3$

$(2)\quad \textit{Flächenberechnung}:$

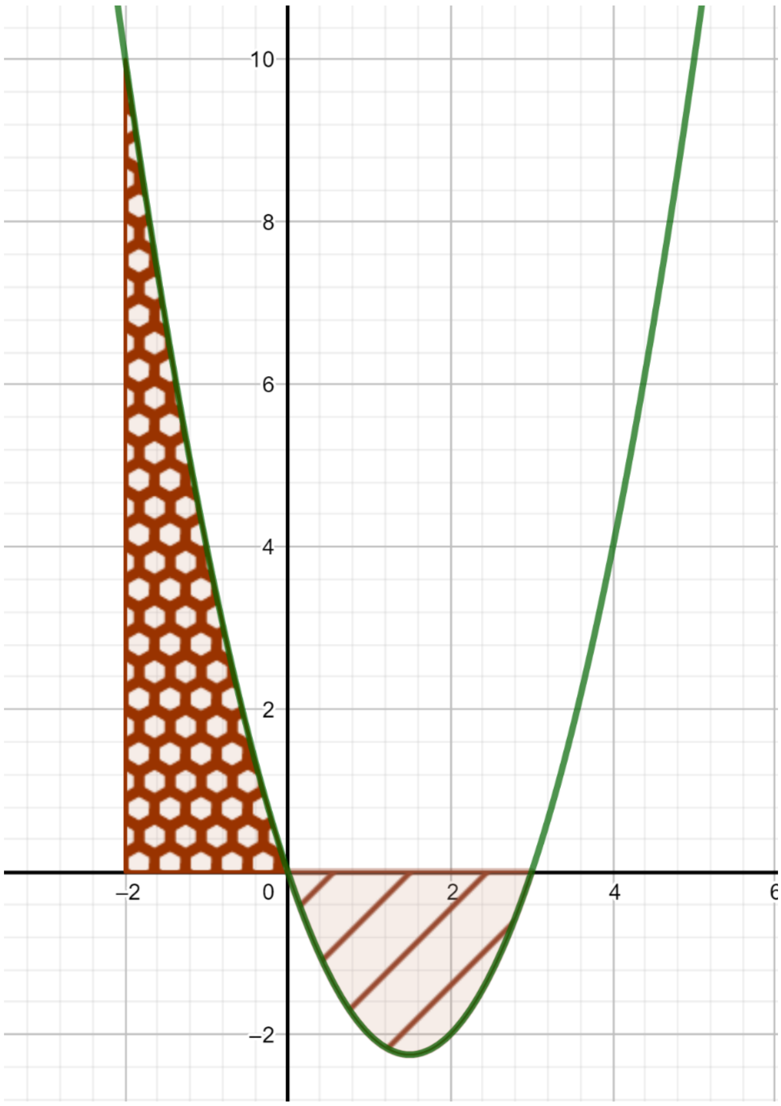
$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \left|\int_{0}^{3} f(x)\,dx\right| = \int_{-2}^{0} \left(x^2 - 3x\right)dx + \left|\int_{0}^{3}\left(x^2 - 3x\right)dx\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right|_{-2}^{0} + \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right|_{0}^{3} = \left[0 - \left(-\frac{8}{3} - 6\right)\right] + \left|(9 - 13{,}5) - 0\right|$$

$$= \frac{26}{3} + \frac{9}{2} = \frac{52}{6} + \frac{27}{6} = \frac{79}{6} \approx 13{,}33$$

Die unterschiedlichen Ergebnisse resultieren aus der Tatsache, dass ein Teil der Fläche unterhalb der x-Achse – daher eine negative Flächenmaßzahl hat - liegt und ein Teil oberhalb; diese hat eine positive Flächenmaßzahl.

Die Verrechnung der beiden Teilflächen führt bei der Integralwertermittlung zu einer Art Differenzfläche, während beider tatsächlichen Flächenermittlung positive und negative Flächen als Flächenmaß getrennt betrachtet und addiert werden.



Aufgabe 5: Trigonometrische Funktionen **25 [10 – 9 – 6]**

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin(2(x-1)) - 1$.

K sei der zugehörige Graph.

a) Geben Sie die allgemeine Sinusfunktion an und beschreiben Sie den Einfluss der Parameter a, b, c und d auf den Graphen der Funktion anhand der Funktion f.

Lösung:

Allgemeine Sinusfunktion:	Konkreter Bezug auf f(x)
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$	$f(x) = \sin(2(x-1)) - 1$
a = Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung; a < 0 => Spiegelung an x = d	a = 1: keine Streckung bzw. Stauchung
b = Streckung bzw. Stauchung in x-Richtung	b = 2: Stauchung in x-Richtung; Halbierung der Periodenlänge
c = Verschiebung in x-Richtung	c = 1: Verschiebung um 1 EH nach rechts
d = Verschiebung in y-Richtung	d = -1: Verschiebung um 1 EH nach unten

b) Berechnen Sie alle Nullstellen. Geben Sie die Nullstellen im Intervall [0; 2π] an.

Lösung:

$$f(x) = \sin(2(x-1)) - 1 = 0 \xrightarrow{+1} \sin(2(x-1)) = 1$$

$$\xrightarrow{\arcsin} 2(x-1) = \frac{1}{2}\pi \rightarrow x = \frac{1}{4}\pi + 1$$

$$\forall\ Nullstellen: \quad x = \frac{1}{4}\pi + 1 + k\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Im } Intervall\ [0;2\pi]: \quad x_1 = \frac{1}{4}\pi + 1 \quad und \quad x_2 = \frac{1}{4}\pi + 1 + 1 \cdot \pi = \frac{5}{4}\pi + 1$$

c) Zeichnen Sie den Graphen K im Intervall [0; 2π]

Verwenden Sie auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit 4/π cm, d.h. π wird bei 4 cm eingetragen.

Lösung: