12. Jgst.	4. Test	Datum: 08.01.2020
Kurs M LK 2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Rekonstruktion ganzrat. Fkt.; Newton-Iteration**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Bearbeiten Sie 4 der 5 Aufgaben!!!

Aufgabe 1:

10	

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Punkt P(0/-1) ein Extremum und im Punkt Q(1/0) einen Sattelpunkt.
Bilden Sie die notwendigen Ansätze und ermitteln Sie die Funktionsgleichung?

Lösung:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

I.) $f(0) = e = -1$

II.) $f'(0) = d = 0$

III.) $f(1) = a + b + c + (-1) = 0$

IV.) $f'(1) = 4a + 3b + 2c = 0$

V.) $f''(1) = 12a + 6b + 2c = 0$

$a = 3 \quad b = -8 \quad c = 6$

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1$$

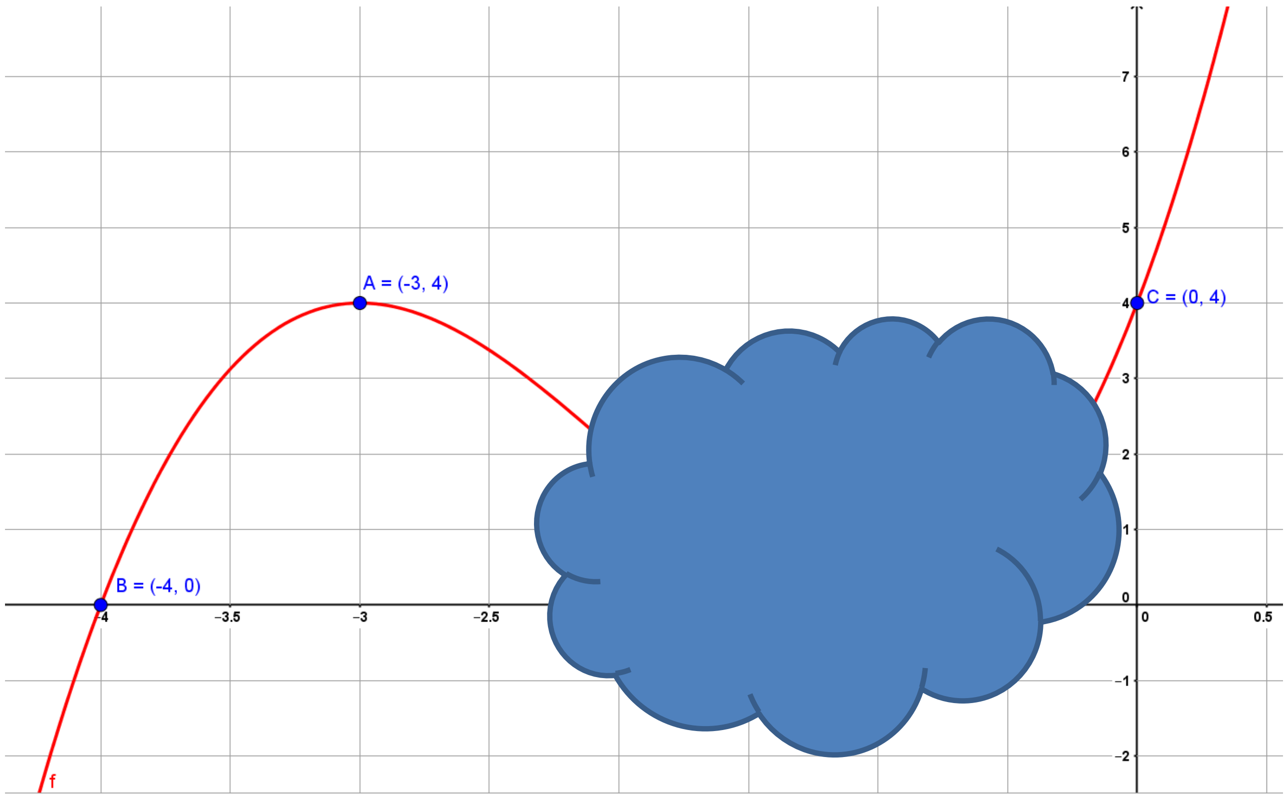
Aufgabe 2: | 10 | |

Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion.

a) Ermitteln Sie die Bedingungen,

b) bilden Sie die Ansätze und

c) bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung.



Lösung:

a) $f(-4) = 0$

$f(-3) = 4$ und $f'(-3) = 0$

$f(0) = 4$

c) $a = 1$ $b = 6$ $c = 9$

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

b) Fkt. 3. Grades

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

I.) $f(0) = d = 4$

II.) $f(-4) = -64a + 16b - 4c + 4 = 0$

III.) $f(-3) = -27a + 9b - 3c + 4 = 4$

IV.) $f'(-3) = 27a - 6b + c = 0$

Aufgabe 3:

10	

Gegeben sind Bedingungen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades.

(1) $f(x) = f(-x)$ (3) $f''(2) = 0$

(2) $f(2) = -\frac{20}{3}$ (4) $f'(2) = -\frac{16}{3}$

a) Formulieren Sie eine Beschreibung der Funktion als Aufgabenstellung.
b) Bilden Sie die notwendigen Ansätze.
c) Berechnen Sie die Gleichung der Funktionsvorschrift.

Lösung:

a) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades ist achsensymmetrisch zur Ordinate und hat einen Wendepunkt bei $W(2/-\frac{20}{3})$. Die Steigung im Wendepunkt beträgt $m = -\frac{16}{3}$.

b)
$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 2c$$

$$\text{I.)}\ f(2) = 16a + 4c + e = -\frac{20}{3}$$
$$\text{II.)}\ f'(2) = 32a + 4c = -\frac{16}{3}$$
$$\text{III.)}\ f''(2) = 48a + 2c = 0$$

$$a = \frac{1}{12} \quad c = -2 \quad e = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$$

Aufgabe 4:

10	

Ein geübter Golfspieler plant, durch einen Abschlag im Winkel von 45° den Ball direkt in das 120 m entfernte Loch zu spielen. Nach dem Abschlag beschreibt der Ball eine parabelförmige Flugbahn. 30 m vor dem Loch steht in direkter Linie zwischen dem Abschlagplatz und dem Loch ein 20 m hoher Baum.
Kann der Schlag gelingen?

Lösung:

⇨ Nächstes Blatt

$f(x) = ax^2 + bx + c$

I.) $f(0) = 0 \rightsquigarrow c = 0$ (Abschlag im Ursprung)

II.) $f'(0) = 1 \rightsquigarrow b = 1$

III.) $f(120) = 0 \rightsquigarrow 14400\,a + 120 = 0 \rightsquigarrow a = -\frac{1}{120}$

$f(x) = -\frac{1}{120}x^2 + x$

$f(90) = -\frac{8100}{120} + 90 = 22\frac{1}{2} > 20$

Aufgabe 5: Newton-Iteration

10	

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 1$

a) Beurteilen Sie kurz, warum im Intervall [0 ; 1] eine Nullstelle liegen muss.
b) Führen Sie zwei Iterationsschritte zur Ermittlung der Nullstelle durch.
c) Warum ist der Wert x = 0 als Startwert ungünstig?

Lösung:

a) $f(0) = 1$ $\quad f(1) = -1{,}5$ $\quad \Rightarrow f(0) > 0$ und $f(1) < 0$

aufgrund Stetigkeit der Fkt. muss gelten (Zwischenwertsatz)

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in \,]0;1[$ mit $f(x_0) = 0$

b)

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
1	$-1{,}5$	-7	$1 - \frac{-1{,}5}{-7} = \frac{11}{14} \approx 0{,}785714$
$\frac{11}{14}$	$-0{,}264616$	$-4{,}586$	$\frac{11}{14} - \frac{-0{,}264616}{-4{,}586} = 0{,}728013$

c) $f'(x) = 2x^3 - 9x^2$

$f'(0) = 0 \rightsquigarrow$ keine Iteration möglich