12. Jgst.	2. Test	Datum: 19.11.2021
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungen; Newton-Verfahren; Tangenten**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Ableitungen**

26	

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \left(2x^k - x^2\right)^n$

b) $f(x) = \left(x^3 - 6x\right)^4$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^6 - 4x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{4x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x - 1}{(4x+1)^2}$

Vereinfachungen bitte nur soweit sinnvoll

- ⇨ keine negativen Potenzen
- ⇨ Kürzen soweit möglich
- ⇨ Klammern ausmultiplizieren, sofern keine höheren Exponenten als 2 vorliegen
- ⇨ bei der Quotientenregel bitte den Nenner nicht faktorisieren

Lösung:

a) $f'(x) = n \cdot \left(2x^k - x^2\right)^{n-1} \cdot \left(2kx^{k-1} - 2x\right)$

b) $f'(x) = 4 \cdot \left(x^3 - 6x\right)^3 \cdot \left(3x^2 - 6\right)$

$$f(x) = \sqrt[5]{x^6 - 4x^3} = \left(x^6 - 4x^3\right)^{0,2}$$

c) $f'(x) = 0,2 \cdot \left(x^6 - 4x^3\right)^{-0,8} \cdot \left(6x^5 - 12x^2\right) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{6x^5 - 12x^2}{\left(x^6 - 4x^3\right)^{0,8}} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{6x^5 - 12x^2}{\sqrt[5]{\left(x^6 - 4x^3\right)^4}}$

d) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\cdot(4x+1) - 4\cdot\left(x^2 - x\right)}{(4x+1)^2} = \dfrac{8x^2 + 2x - 4x - 1 - 4x^2 + 4x}{(4x+1)^2} = \dfrac{4x^2 + 2x - 1}{(4x+1)^2}$

e)

$$f'(x) = \frac{(8x+2)\cdot(4x+1)^2 - (4x^2+2x-1)\cdot 2\cdot(4x+1)\cdot 4}{(4x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(4x+1)\left[(8x+2)\cdot(4x+1)-(4x^2+2x-1)\cdot 8\right]}{(4x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{\left[32x^2+16x+2-(32x^2+16x-8)\right]}{(4x+1)^3} = \frac{10}{(4x+1)^3}$$

34	

Aufgabe 2: **Newton-Iteration & Tangenten an Kurven**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$ und der Punkt $P(1 \mid -5)$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt nicht auf der Funktion liegt.

b) Begründen Sie, warum die Funktion genau zwei Extrema besitzt.

c) Bestimmen Sie die Tangentengleichung vom Punkt P an die Funktion f und ermitteln Sie den Berührpunkt.

d) Bestimmen Sie ein Intervall für **x < 0**, in welchem eine Nullstelle der Funktion liegt und begründen Sie kurz Ihre Wahl.

e) Ermitteln Sie mittels Newton-Iteration eine Nullstelle der Funktion mit **x < 0** mit der Genauigkeit von 0,001.

f) Welche beiden Voraussetzungen müssen gelten, damit das Newton-Verfahren durchführbar ist?

Lösung:

a) Zeigen Sie, dass der Punkt nicht auf der Funktion liegt.

$$f(1) = 1^3 - 2\cdot 1 + 1 = 0 \neq -5 \rightarrow P \notin f$$

b) Begründen Sie, warum die Funktion genau zwei Extrema besitzt.

Begründung erfolgt über das hinreichende Kriterium für Extrema mittels Differentialrechnung

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}} = \pm\sqrt{\frac{6}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$f''(x) = 6x \rightarrow f''\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) = 6\cdot\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) = \pm 2\sqrt{6} \neq 0$$

Die Funktion besitzt zwei Extrema, da das hinreichende Kriterium erfüllt ist.

c) Bestimmen Sie die Tangentengleichung vom Punkt P an die Funktion f und ermitteln Sie den Berührpunkt.

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

Im Berührpunkt Q(x/f(x)) der Tangente mit der Funktion gilt:

Steigung der Funktion = Steigung der Tangente

$$m_{Funktion}: \ f'(x) \quad \leftrightarrow \quad m_{Tangente}: \ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$Ansatz: \ f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x) = \frac{f(x)-b}{x-a} \rightarrow$$

$$3x^2 - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1 - (-5)}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\cdot(x-1)} (3x^2-2)(x-1) = x^3 - 2x + 6 \rightarrow 3x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = x^3 - 2x + 6$$

$$\rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$Berührpunkt: \ Q(2 \mid f(2)) = Q(2 \mid 5)$$

$$Tangentengleichung: \ Ermittlung \ mit \ P(1 \mid -5)$$

$$-5 = f'(2) \cdot 1 + b \rightarrow -5 = 10 \cdot 1 + b \rightarrow b = -15 \rightarrow t(x) = 10x - 15$$

d) Bestimmen Sie ein Intervall für **x < 0**, in welchem eine Nullstelle der Funktion liegt und begründen Sie kurz Ihre Wahl.

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 2 + 1 = 2 \\ f(-2) &= -8 + 4 + 1 = -3 \end{aligned}\right\} \quad I =]-2\,;-1[$$

Aufgrund des VZ-Wechsels der Funktionswerte im Intervall

f) Welche beiden Voraussetzungen müssen gelten, damit das Newton-Verfahren durchführbar ist?

Voraussetzungen:

$$i) \quad f(x) \ differenzierbar$$

$$ii) \quad f'(x) \neq 0$$

$$iii) \quad \frac{f(x_n) \cdot f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2} = k \quad für \quad k \in]0;1[\quad mit \ x \in U(x)$$

$$\rightarrow f(x_n) \cdot f''(x_n) > 0 \quad d.h. \quad f(x_n) \ und \ f''(x_n) \ besitzen \ gleiches \ Vorzeichen!$$

e) Ermitteln Sie mittels Newton-Iteration eine Nullstelle der Funktion mit **x < 0** mit der Genauigkeit von 0,001.

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \qquad und \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	**-2**	-3	10	-1.7
1	**-1.7**	-0.513	6.67	-1.62308
2	**-1.62308**	-0.029713	5.903248	-1.61805
3	**-1.61805**	-0.000123	5.854306	-1.61803

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	**-1**	2	1	-3
1	**-3**	-20	25	-2.2
2	**-2.2**	-5.248	12.52	-1.7808306
3	**-1.78083**	-1.0859900	7.5140736355378	-1.6363032
4	**-1.636303**	-0.1085760	6.0324645160144	-1.6183045
5	**-1.618304**	-0.0015844	5.8567291224432	-1.6180340