12. Jgst. **4. Kursarbeit** **Datum: 24.06.2022**

Kurs 12/2 **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Thema: Lineare Algebra - Anwendungsbezogen; K-Disk (ganzrat. Scharfunktion)

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **18**

Ermitteln Sie die Lösungen der Matrizenaufgaben

a) $\left[3B+2D\right]\cdot E^2$

b) $2\left(D\cdot E\right)^2$

c) $Det\left[B-D\right]$

d) $D^{(-1)}$

Gegebene Matrizen: $B=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$ E = Einheitsmatrix

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme **28**

Gegeben sind die Matrix C_k und der Vektor $\vec{d}$

$$C_k=\begin{pmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad mit\ k\in\Re \qquad \text{und} \qquad \vec{d}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{x}_t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$ eine Lösung für die Gleichung $C_2\cdot\vec{x}_t=\vec{d}$ darstellt.

Bestimmen hierzu auch den Wert von k.

b) Geben Sie eine Lösung für das LGS $C_0\cdot\vec{x}=\vec{d}$.
Stellen Sie den Lösungsprozess mittels Cramer-Regel oder Gauß-Algorithmus dar.

c) Weisen Sie durch entsprechende Rechenoperation nach, dass die Determinante der Matrix

C_k $mit\ k\in\Re$ folgende Form annehmen kann: $\det C_k = (k-3)(k+2)^2$

d) Was bedeutet die Eigenschaft „singulär“ bezüglich einer Matrix?

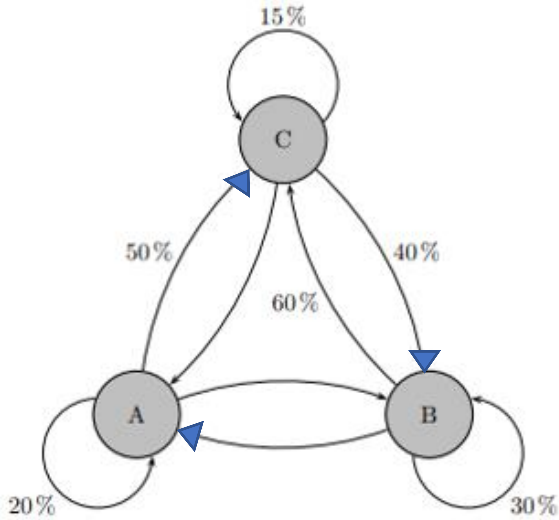
e) Für welche Werte von k hat das inhomogene LGS $C_k\cdot\vec{x}=\vec{d}$

I) keine Lösung? II) genau eine Lösung? III) ∞ - viele Lösungen?

Aufgabe 3: Übergänge und Statisches Gleichgewicht I

30	

a) Ergänzen Sie die zum Diagramm des Austauschprozesses und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.



Die Übergangsmatrix U soll nun folgende Form annehmen:

$$U = \begin{array}{c|ccc} \downarrow & A & B & C \\ \hline A & & & \\ B & & & \\ C & & & \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

, der Startzustand sei $\overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$

b) Wie lauten die Vektoren $\overrightarrow{p_1}$ *und* $\overrightarrow{p_2}$?

c) Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{p_{-1}}$.

d) Bestimmen Sie den Grenzzustandsvektor in allgemeiner Form in Abhängigkeit der Komponente x_3 bzw. z

e) Wie ist die Grenzverteilung bei einer Spaltensumme von 4.000?

f) Erläutern Sie den Begriff der Gleichgewichtsverteilung.

Aufgabe 4: Leontief-Modell

30	

Die Verflechtung dreier Werke A, B und C eines Chemieunternehmens untereinander und mit dem Markt wird durch das Leontief-Modell beschrieben.

Dabei gilt folgende Technologische Matrix T:

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} \rightarrow & A & B & C \\ \hline A & 0,4 & 0,05 & 0,4 \\ B & 0,3 & 0,25 & 0 \\ C & 0,12 & 0,1 & 0,2 \end{array}\right)$$

a) Berechnen Sie die **Marktabgabe** $\vec{y}$ der Werke A, B und C, wenn **800 ME von A**, **520 ME von B** und **450 ME von C** produziert werden.

b) Erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle bzw. füllen Sie die Vorlage aus:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|c} \rightarrow & A & B & C & \text{Konsum} & \text{Produktion} \\ \hline A & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & y_1 = \boxed{} & x_1 = \boxed{} \\ B & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & y_2 = \boxed{} & x_2 = \boxed{} \\ C & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & y_3 = \boxed{} & x_3 = \boxed{} \end{array}\right)$$

c) Für einen kommenden Zeitraum wird mit dem Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 374 \\ 150 \\ 112 \end{pmatrix}$ gerechnet.

Bestimmen Sie den neuen zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

ZUSATZAUFGABE:

30	

Durch ein neues Produktionsverfahren ändern sich die **Koeffizienten a_{11} und a_{21}** der **Technologie-Matrix T**.

Außerdem soll die Produktion der Werke A, B und C auf das Verhältnis

$x_1 : x_2 : x_3 = 10 : 8 : 5$ umgestellt werden.

Der neue Marktvektor ist $\vec{y} = \begin{pmatrix} 549 \\ 297 \\ 180 \end{pmatrix}$

Ermitteln Sie die neue Technologie-Matrix T sowie den neuen Produktionsvektor $\vec{x}$.

Aufgabe 5: Lineare Optimierung I

24	

In einer sehr kleinen Schuhfabrik werden Damen- und Herrenschuhe hergestellt und zwar jeweils nur ein Modell.
Die Produktionsbedingungen ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

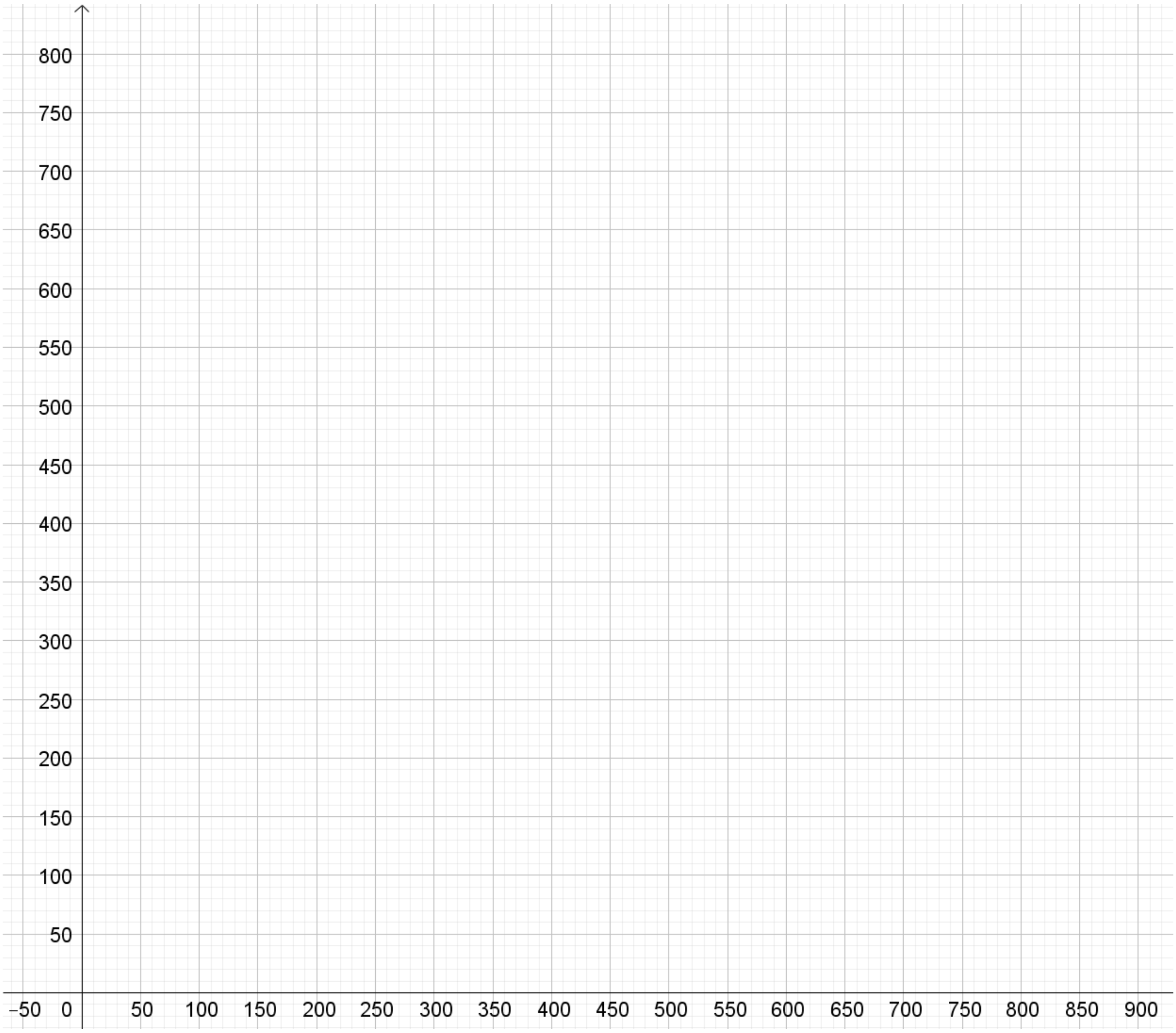
		Damenschuh	Herrenschuh	verfügbar
Herstellungszeit	$[h]$	20	10	8000
Maschinenbearbeitung	$[h]$	4	5	2000
Lederbedarf	$[dm^2]$	6	15	4500
Reingewinn	$[Euro]$	16	32	

Wie viele Mengeneinheiten eines jeden Schuhmodells müssen unter Einhaltung der Restriktionen hergestellt und verkauft werden, um den Gewinn zu maximieren?

Geben Sie in der Lösung auch die Höhe/Menge der eventuell freien Kapazitäten an.

Lösen Sie das Problem ***graphisch und per Simplexalgorithmus***.

Anlage für die graphische Lösung



Anlage für den Simplexalgorithmus

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							

Option: Wählen Sie Aufgabe 6 oder Aufgabe 7 zur weiteren Bearbeitung aus!

Aufgabe 6: Lineare Optimierung II – Beurteilen, Auswerten und Interpretieren | 30 | |

Teil 1: Ein Maximierungsproblem führt auf untenstehendes Tableau.

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
I	0	0	1	- 8	2	1.000
II	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	250
III	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	200
Z	0	0	0	-1,6	-1,6	G - 10.400

a) Wie würden sich die Werte von x, y und dem Gewinn verändern, wenn man die Kapazität von Restriktion II um 10 Einheiten erhöhen würde?

b) Der Gewinn **reduziert** sich **um 48 Einheiten** aufgrund einer Anpassung der Kapazität der Restriktion III.

Wie hoch ist die Änderung von Restriktion III und welche Werte nehmen x und y an?

Teil 2: Gegeben sind die beiden aufeinanderfolgenden Tableau-Elemente Tableau 1 und Tableau 2 eines Simplexalgorithmus.

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	50
u_2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	10
u_3	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	110
	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	z − 250

Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
x_2	0	1	2	1	−1	0	40
x_1	1	0	−4	−2	3	0	30
u_3	0	0	10	3	−5	1	60
	0	0	1	−1	−1	0	z − 260

a) Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?

b) Bestimmen Sie das Pivot-Element von Tableau 1. Erklären Sie Ihre Vorgehensweise.

c) Erklären Sie, durch welche Umformungen Tableau 2 aus Tableau 1 entstanden ist.

d) Beantworten Sie folgende Fragestellungen zu Tableau 2:

(i) Welcher Gewinn wird erzielt?

(ii) Wie viel wird produziert?

(iii) Welchen Umfang haben die freien Kapazitäten?

e) Erstellen Sie nun Tableau 3, geben Sie die vollständige Lösung an und begründen Sie, warum nun ein Maximum vorliegen muss.

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	0	1	2	1	-1	0	40	
II	1	0	-4	-2	3	0	30	
III	0	0	10	3	-5	1	60	
Z	0	0	1	-1	-1	0	G - 260	
I								
II								
III								
Z								
I								
II								
III								
Z								

Aufgabe 7: Kurvenuntersuchung ganzrationaler Scharfunktionen

30	

Die Firma Rutschikon hat ein besonderes Modell für Wasserrutschen in verschiedenen Formen konzipiert;

das seitliche Profil wird jeweils durch den Graphen der Funktionenschar f_k mit der Gleichung

$$f_k(x) \quad = \quad -\frac{1}{4k^2}x^3 + \frac{3}{4}x \quad mit\ k \in [3\,;4]$$

modelliert. Die Werte für x und die Funktionswerte liegen in Metern vor.

Gerutscht wird von der Startposition **P(- 8 / 6,5)** ;
am Ursprung endet die Rutsche und man wird sozusagen ins Becken katapultiert.

a) Für welchen Wert von k wurde der Startpunkt entworfen?

b) In welchem Intervall verläuft die Profillinie der Rutsche unterhalb der Wasseroberfläche?

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des tiefsten Punkts des Wasserrutschen-Profils.
Zeigen Sie auch, dass Ihr Punkt ein Minimum darstellt.

d) Berechnen Sie die Gleichung aller Tiefpunkte von $f_k(x)$.

e) Bestimmen Sie den Wert von k, für den die Wasserrutsche im Startpunkt die Steigung m = -3 hat und die Höhe über der Wasseroberfläche in diesem Punkt.

f) Zeigen Sie, dass alle Wasserrutschenprofile der Funktion $f_k(x)$ im Ursprung dieselbe Steigung haben und geben Sie diese Steigung in Prozent und Grad an.

g) Wie groß ist die Seitenprofilfläche der Wasserrutschte unterhalb der Wasseroberfläche für k = 3?