12. Jgst. **4. Kursarbeit** **Datum: 24.06.2022**
Kurs 12/2 **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Thema: Lineare Algebra - Anwendungsbezogen; K-Disk (ganzrat. Scharfunktion)

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1:
Ermitteln Sie die Lösungen der Matrizenaufgaben

18	

a) $\left[3B+2D\right]\cdot E^2 = \begin{pmatrix} 5k & 3 & 10 \\ 0 & 3k+2 & 2k+9 \\ -1 & 2k-6 & 12 \end{pmatrix}$

c) $Det\left[B-D\right] = 3k-6$

d) $D^{(-1)} \xrightarrow[VZ-Schema \quad \frac{1}{Det}]{adj. \quad transp.} \frac{1}{k^3+2}\begin{pmatrix} k^2 & -2k & 2 \\ -k & 2 & k^2 \\ 1 & k^2 & -k \end{pmatrix}$

b) $2\left(D\cdot E\right)^2 = 2\cdot\begin{pmatrix} k^2+2 & 2k & 2k \\ k & k^2+1 & k \\ k & k & k^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k^2+4 & 4k & 4k \\ 2k & 2k^2+2 & 2k \\ 2k & 2k & 2k^2+4 \end{pmatrix}$

Gegebene Matrizen: $B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ E = Einheitsmatrix

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme

28	

Gegeben sind die Matrix C_k und der Vektor $\vec{d}$

$$C_k = \begin{pmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re \qquad \text{und} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{x}_t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$ eine Lösung für die Gleichung $C_2 \cdot \vec{x}_t = \vec{d}$ darstellt.

$$C_2 \cdot \vec{x}_t = \vec{d} \xrightarrow[nachrechnen]{einsetzen} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5+0,5t \\ -1,25+0,25t \\ 0,5-0,5t \end{pmatrix} \overset{t=(-3)}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie eine Lösung für das LGS $C_0 \cdot \vec{x} = \vec{d}$.
Stellen Sie den Lösungsprozess mittels Cramer-Regel oder Gauß-Algorithmus dar.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &=& 4 \quad (1) \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &=& -2 \quad (2) \\ -x_2 - 2x_3 &=& 2 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 &=& 2 \quad (1) \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &=& -2 \quad (2) \\ -x_2 - 2x_3 &=& 2 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 &=& 2 \quad (1) \\ 4x_2 + 2x_3 &=& 4 \quad (2) \\ -x_2 - 2x_3 &=& 2 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 &=& 2 \quad (1) \\ x_2 + 1/2\, x_3 &=& 1 \quad (2) \\ -x_2 - 2x_3 &=& 2 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 1/2\, x_3 &=& 1 \quad (1) \\ x_2 + 1/2\, x_3 &=& 1 \quad (2) \\ -x_2 - 2x_3 &=& 2 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 1/2\, x_3 &=& 1 \quad (1) \\ x_2 + 1/2\, x_3 &=& 1 \quad (2) \\ -3/2\, x_3 &=& 3 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 1/2\, x_3 &=& 1 \quad (1) \\ x_2 + 1/2\, x_3 &=& 1 \quad (2) \\ x_3 &=& -2 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& 2 \quad (1) \\ x_2 + 1/2\, x_3 &=& 1 \quad (2) \\ x_3 &=& -2 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& 2 \quad (1) \\ x_2 &=& 2 \quad (2) \\ x_3 &=& -2 \quad (3) \end{array}$$

c) Weisen Sie durch entsprechende Rechenoperation nach, dass die Determinante der Matrix C_k *mit* $k \in \Re$ folgende Form annehmen kann: $\det C_k = (k-3)(k+2)^2$

$$\det\left[C_k\right] \underset{nach\ Sarrus}{\overset{Erweiterung}{=}} \det\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & k+2 & 2 & 2 & k+2 \\ -3 & 1 & k-1 & -3 & 1 \\ k & -1 & -2 & k & -1 \end{array}\right)$$

$$= -4 + k(k-1)(k+2) + 6 - 2k + 2(k-1) - 6(k+2)$$

$$= 2 + (k^2-k)(k+2) - 2k + 2k - 2 - 6k - 12 = (k^2 - k - 6)(k+2)$$

$$= (k-3)(k+2)(k+2) = (k-3)(k+2)^2$$

d) Was bedeutet die Eigenschaft „singulär“ bezüglich einer Matrix?

Die Eigenschaft „singulär“ bei einer Matrix bedeutet, dass sie nicht invertierbar ist und somit keine Inverse besitzt.

e) Für welche Werte von k hat das inhomogene LGS $C_k \cdot \vec{x} = \vec{d}$
I) keine Lösung? II) genau eine Lösung? III) ∞ - viele Lösungen?

$$\det C_k = (k-3)(k+2)^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad \textit{eindeutige Lösung} \Leftrightarrow k \in \Re \setminus \{-2;3\}$$

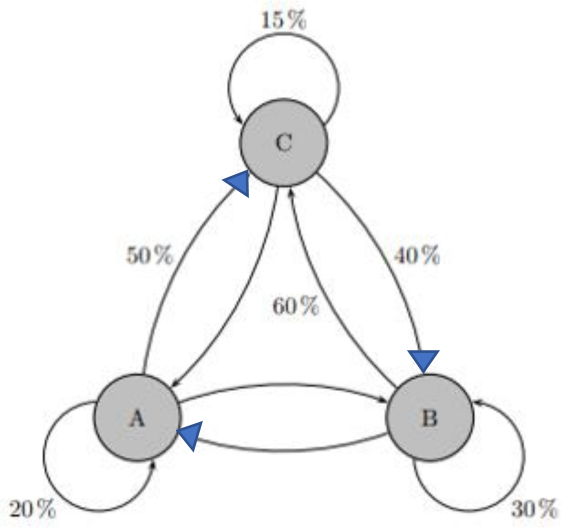
$$\rightarrow \quad \textit{keine Lösung} \Leftrightarrow k = (-2) \quad [\text{Probe mit Gauß-Verfahren}]$$

$$\rightarrow \quad \infty - \textit{viele Lösung} \Leftrightarrow k = 3 \quad [\text{Probe mit Gauß-Verfahren}]$$

30

Aufgabe 3: Übergänge und Statisches Gleichgewicht I

a) Ergänzen Sie die zum Diagramm des Austauschprozesses und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.



$$U = \left(\begin{array}{c|ccc} \Rsh & A & B & C \\ \hline A & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}45 \\ B & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}40 \\ C & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}15 \end{array}\right)$$

Die Übergangsmatrix U soll nun folgende Form annehmen:

$$U = \left(\begin{array}{c|ccc} \Rsh & A & B & C \\ \hline A & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ B & 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ C & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{array}\right)$$, der Startzustand sei $\overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$

b) Wie lauten die Vektoren $\overrightarrow{p_1}$ *und* $\overrightarrow{p_2}$?

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 270 \\ 210 \end{pmatrix} \qquad U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 270 \\ 210 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 \\ 303 \\ 165 \end{pmatrix}$$

c) Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{p_{-1}}$.

$$\left.\begin{array}{l} Ansatz\,1: \; U \cdot \overrightarrow{p_{-1}} = \overrightarrow{p_0} \rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \quad Gauß-Verfahren \\ Ansatz\,2: \; U \cdot \overrightarrow{p_{-1}} = \overrightarrow{p_0} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \quad Inverse \end{array}\right\} \overrightarrow{p_{-1}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66\frac{2}{3} \\ 53\frac{1}{3} \\ 480 \end{pmatrix}$$

d) Bestimmen Sie den Grenzzustandsvektor in allgemeiner Form in Abhängigkeit der Komponente x_3 bzw. z

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \rightarrow \quad U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad (U - E)\vec{x} = \vec{0} \quad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|c|c} & x & y & z & & \\ \hline i & -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & i \leftrightarrow iii \\ ii & 0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}3 & 0 & \\ iii & 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}4 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc|c|c} & x & y & z & & \\ \hline i & 1 & 1 & -4 & 0 & \\ ii & 2 & -2 & 3 & 0 & ii - 2i \\ iii & -3 & 1 & 1 & 0 & iii + 3i \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|c|c} & x & y & z & & \\ \hline i & 1 & 1 & -4 & 0 & \\ ii & 0 & -4 & 11 & 0 & ii/4 \\ iii & 0 & 4 & -11 & 0 & iii + ii \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|c|c} & x & y & z & & \\ \hline i & 1 & 1 & -4 & 0 & i - ii \\ ii & 0 & 1 & -\frac{11}{4} & 0 & \\ iii & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc|c|c} & x & y & z & & \\ \hline i & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & x=\frac{5}{4}z \\ ii & 0 & 1 & -\frac{11}{4} & 0 & y=\frac{11}{4}z \\ iii & 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}k\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e) Wie ist die Grenzverteilung bei einer Spaltensumme von 4.000?

$$\frac{5}{4}k+\frac{11}{4}k+k=4.000 \quad \rightarrow \quad 5k=4000 \quad \rightarrow \quad k=800 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 2.200 \\ 800 \end{pmatrix}$$

f) Erläutern Sie den Begriff der Gleichgewichtsverteilung.

Unter der Gleichgewichtsverteilung bzw. dem statischen Gleichgewicht versteht eine Situation, bei der die Wechselbewegungen sich insgesamt immer wieder zu einer Verteilung in konstanter Form ergeben.

30

Aufgabe 4: Leontief-Modell

Die Verflechtung dreier Werke A, B und C eines Chemieunternehmens untereinander und mit dem Markt wird durch das Leontief-Modell beschrieben.

Dabei gilt folgende Technologische Matrix T:

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} \rightarrow & A & B & C \\ \hline A & 0,4 & 0,05 & 0,4 \\ B & 0,3 & 0,25 & 0 \\ C & 0,12 & 0,1 & 0,2 \end{array}\right)$$

a) Berechnen Sie die **Marktabgabe** $\vec{y}$ der Werke A, B und C, wenn **800 ME von A**, **520 ME von B** und **450 ME von C** produziert werden.

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,4 \\ 0,3 & 0,25 & 0 \\ 0,12 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 520 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$T\cdot\vec{x}+\vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x}-T\cdot\vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E-T)\cdot\vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,05 & -0,4 \\ -0,3 & 0,75 & 0 \\ -0,12 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 800 \\ 520 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 274 \\ 150 \\ 212 \end{pmatrix}$$

b) Erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle bzw. füllen Sie die Vorlage aus:

↱	A	B	C	Konsum	Produktion
A	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$y_1 = \boxed{}$	$x_1 = \boxed{}$
B	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$y_2 = \boxed{}$	$x_2 = \boxed{}$
C	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$y_3 = \boxed{}$	$x_3 = \boxed{}$

↱	A	B	C	Konsum	Produktion
A	$\boxed{320}$	$\boxed{26}$	$\boxed{180}$	$y_1 = \boxed{274}$	$x_1 = \boxed{800}$
B	$\boxed{240}$	$\boxed{130}$	$\boxed{0}$	$y_2 = \boxed{150}$	$x_2 = \boxed{520}$
C	$\boxed{96}$	$\boxed{52}$	$\boxed{90}$	$y_3 = \boxed{212}$	$x_3 = \boxed{450}$

c) Für einen kommenden Zeitraum wird mit dem Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 374 \\ 150 \\ 112 \end{pmatrix}$ gerechnet. Bestimmen Sie den neuen zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,4 \\ 0,3 & 0,25 & 0 \\ 0,12 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 374 \\ 150 \\ 112 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,05 & -0,4 \\ -0,3 & 0,75 & 0 \\ -0,12 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 374 \\ 150 \\ 112 \end{pmatrix}$$

$$Lösung\ per\ LGS: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 560 \\ 345 \end{pmatrix}$$

$$Lösung\ per\ Leontief-Inverse: \quad \rightarrow \vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 560 \\ 345 \end{pmatrix}$$

Zusatz:

10	

Durch ein neues Produktionsverfahren ändern sich die **Koeffizienten a_{11} und a_{21}** der **Technologie-Matrix T**.

Außerdem soll die Produktion der Werke A, B und C auf das Verhältnis

$x_1 : x_2 : x_3 = 10 : 8 : 5$ umgestellt werden.

Der neue Marktvektor ist $\vec{y} = \begin{pmatrix} 549 \\ 297 \\ 180 \end{pmatrix}$

Ermitteln Sie die neue Technologie-Matrix T sowie den neuen Produktionsvektor $\vec{x}$.

$$T_{neu} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0{,}05 & 0{,}4 \\ a_{21} & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 549 \\ 297 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -0{,}05 & -0{,}4 \\ -a_{21} & 0{,}75 & 0 \\ -0{,}12 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10x \\ 8x \\ 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 549 \\ 297 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,3} -1{,}2x - 0{,}8x + 4x = 180 \rightarrow 2x = 180 \rightarrow x = 90 \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 720 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,2} -900\,a_{21} + 540 + 0 = 297 \rightarrow a_{21} = \frac{243}{900} = 0{,}27$$

$$\xrightarrow{Zeile\,1} (1 - a_{11}) \cdot 900 - 36 - 180 = 549 \rightarrow 1 - a_{11} = \frac{765}{900} = 0{,}85 \rightarrow a_{11} = 0{,}15$$

24

Aufgabe 5: Lineare Optimierung I

In einer sehr kleinen Schuhfabrik werden Damen- und Herrenschuhe hergestellt und zwar jeweils nur ein Modell.
Die Produktionsbedingungen ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

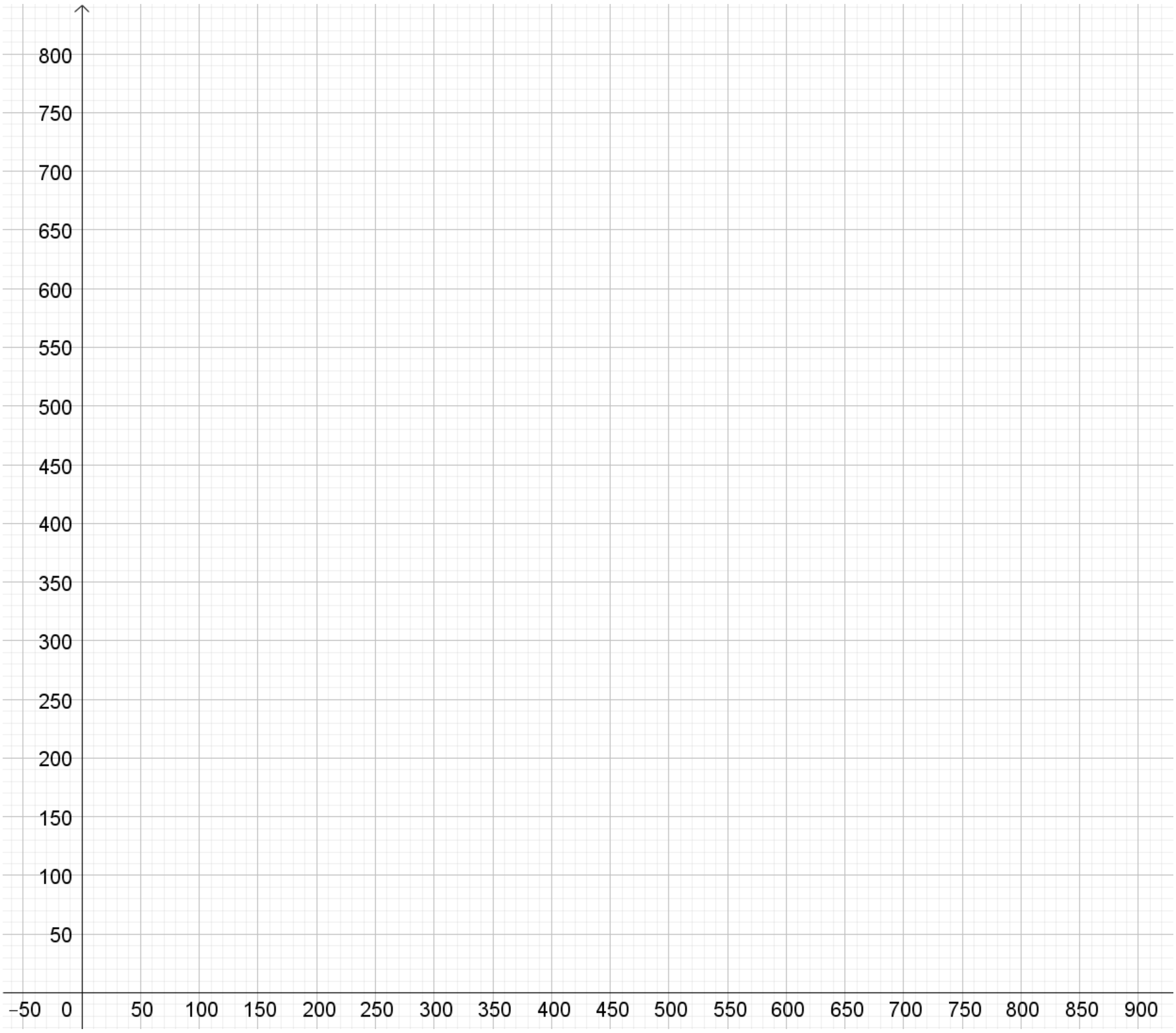
		Damenschuh	Herrenschuh	verfügbar
Herstellungszeit	$[h]$	20	10	8000
Maschinenbearbeitung	$[h]$	4	5	2000
Lederbedarf	$[dm^2]$	6	15	4500
Reingewinn	$[Euro]$	16	32	

Wie viele Mengeneinheiten eines jeden Schuhmodells müssen unter Einhaltung der Restriktionen hergestellt und verkauft werden, um den Gewinn zu maximieren?

Geben Sie in der Lösung auch die Höhe/Menge der eventuell freien Kapazitäten an.

Lösen Sie das Problem ***graphisch und per Simplexalgorithmus***.

Anlage für die graphische Lösung



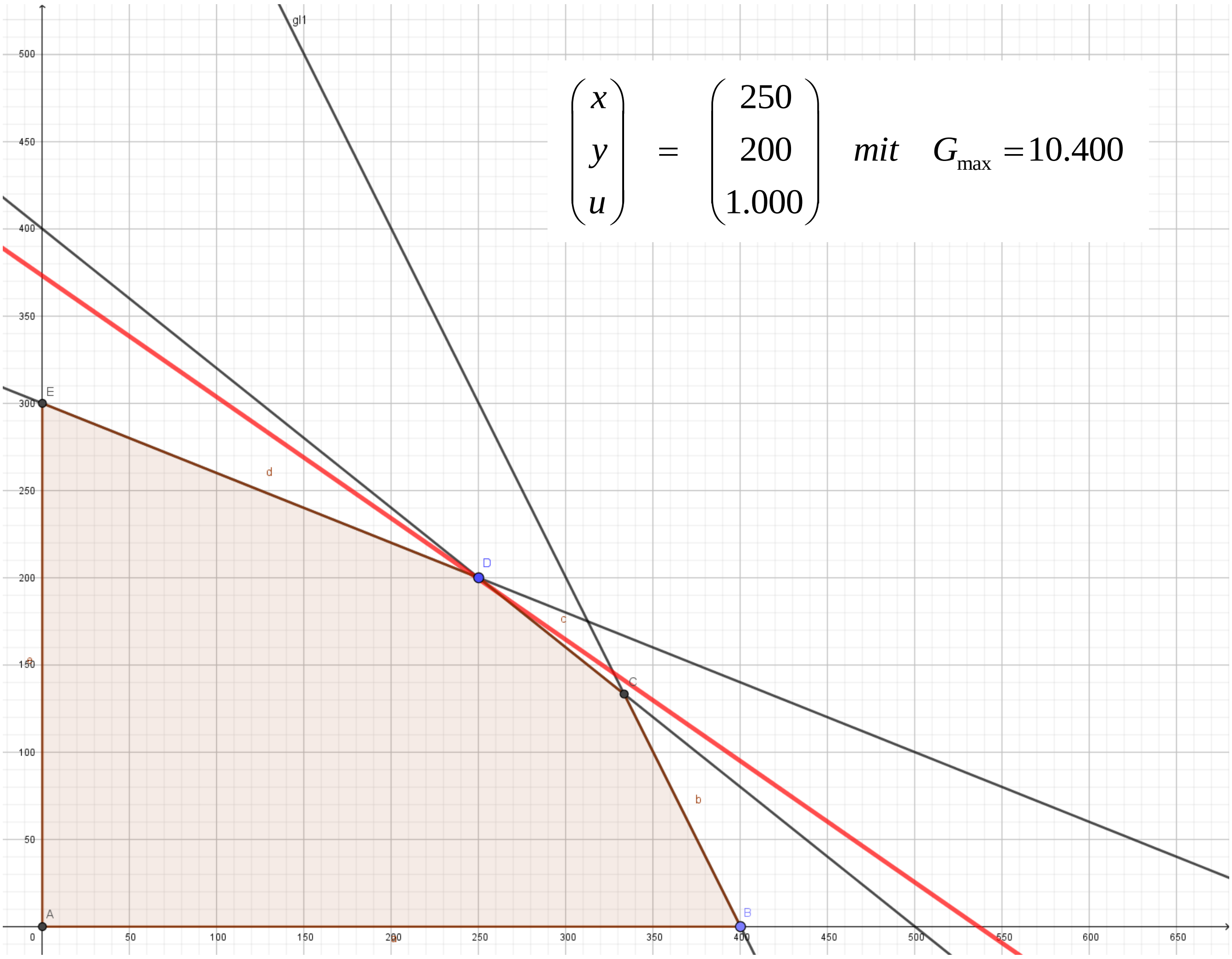
Anlage für den Simplexalgorithmus

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							

Simplexalgorithmus:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	20	10	1	0	0	8.000	$\frac{8000}{10}=800$
II	4	5	0	1	0	2.000	$\frac{2000}{5}=400$
III	6	15	0	0	1	4.500	$\frac{4500}{15}=300 \rightarrow \frac{1}{15}\cdot III$
Z	16	32	0	0	0	G	
I	20	10	1	0	0	8.000	I – 10*III
II	4	5	0	1	0	2.000	II – 5*III
III	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{15}$	300	
Z	16	32	0	0	0	G	ZF – 32*III
I	16	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	5.000	$\frac{5000}{16}=312,5$
II	2	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	500	$\frac{500}{2}=250 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot II$
III	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{15}$	300	$\frac{300}{2}\cdot 5=750$
Z	$\frac{16}{5}$	0	0	0	$-\frac{32}{15}$	G-9.600	
I	16	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	5.000	I – 16*II
II	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	250	
III	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{15}$	300	$III-\frac{2}{5}\cdot II$
Z	$\frac{16}{5}$	0	0	0	$-\frac{32}{15}$	G-9.600	$ZF-\frac{16}{5}\cdot II$
I	0	0	1	- 8	2	1.000	
II	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	250	
III	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	200	
Z	0	0	0	-1,6	-1,6	G-10.400	

Graphische Lösung:



Option: Wählen Sie Aufgabe 6 oder Aufgabe 7 zur weiteren Bearbeitung aus!

30	

Aufgabe 6: Lineare Optimierung II – Beurteilen, Auswerten und Interpretieren

Teil 1: Ein Maximierungsproblem führt auf untenstehendes Tableau.

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
I	0	0	1	- 8	2	1.000
II	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	250
III	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	200
Z	0	0	0	-1,6	-1,6	G - 10.400

a) Wie würden sich die Werte von x, y und dem Gewinn verändern, wenn man die Kapazität von Restriktion II um 10 Einheiten erhöhen würde?

Lösung:

Restriktion II	**+ 10**	
Gewinn neu:	**10.400 + 10 * 1,6 =**	**10.416**
Wert x:	**250 + 10 * 0,5 =**	**255**
Wert y:	**200 + 10 * (-0,2) =**	**198**

b) Der Gewinn **reduziert** sich **um 48 Einheiten** aufgrund einer Anpassung der Kapazität der Restriktion III.
Wie hoch ist nun die Kapazität von Restriktion III und welche Werte nehmen x und y an?

Lösung:

Gewinn neu: **10.400 – 48 = 10.352**

Änderung Restriktion III: **-48 : (-1,6) = 30 Verringerung um 30 Einheiten**

Wert x: $250+(-30)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = 255$ **Wert y:** $200+(-30)\cdot\frac{2}{15} = 196$

Teil 2: Gegeben sind die beiden aufeinanderfolgenden Tableau-Elemente Tableau 1 und Tableau 2 eines Simplexalgorithmus.

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	50
u_2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	10
u_3	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	110
	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$z-250$

Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
x_2	0	1	2	1	−1	0	40
x_1	1	0	−4	−2	3	0	30
u_3	0	0	10	3	−5	1	60
	0	0	1	−1	−1	0	$z-260$

a) Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?

Es gibt noch positive Werte in der Zielfunktionszeile.

b) Bestimmen Sie das Pivot-Element von Tableau 1. Erklären Sie Ihre Vorgehensweise.

Höchster Wert in der Zielfunktionszeile ergibt die Pivotspalte (hier Spalte 1); dann Division der positiven Elemente in der Pivotspalte durch die Ergebniswert in der letzten Spalte

- ⇨ **Pivotelement ist der kleinste Ergebniswert, da dieser die größte Knappheit der Ressourcen darstellt.**

c) Erklären Sie, durch welche Umformungen Tableau 2 aus Tableau 1 entstanden ist.

Schritt 1: **Zeile ii mit 3 multipliziert**

Schritt 2: **(i) – 1/3 * (ii)** **(iii) – 5/3 * (ii)** **ZF – 1/3 * (ii)**

d) Beantworten Sie folgende Fragestellungen zu Tableau 2:

(i) Welcher Gewinn wird erzielt? **Gewinn: 260**

(ii) Wie viel wird produziert? **$x_1 = 30$ und $x_2 = 40$**

(iii) Welchen Umfang haben die freien Kapazitäten? **Restriktion (iii) = 60**

e) Erstellen Sie nun Tableau 3, geben Sie die vollständige Lösung an und begründen Sie, warum nun ein Maximum vorliegen muss.

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	0	1	2	1	-1	0	40	
II	1	0	-4	-2	3	0	30	
III	0	0	10	3	-5	1	60	
Z	0	0	1	-1	-1	0	G - 260	
I								
II								
III								
Z								
I								
II								
III								
Z								

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 28 \\ 6 \end{pmatrix} \quad mit \quad G_{\max} = 266$$

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	0	1	2	1	-1	0	40	
II	1	0	-4	-2	3	0	30	
III	0	0	10	3	-5	1	60	iii / 10
Z	0	0	1	-1	-1	0	G - 260	
I	0	1	2	1	-1	0	40	i - 2iii
II	1	0	-4	-2	3	0	30	Ii + 4iii
III	0	0	1	0,3	-0,5	0,1	6	
Z	0	0	1	-1	-1	0	G - 260	Z - iii
I	0	1	0	0,4	0	-0,2	28	
II	1	0	0	-0,8	1	0,4	54	
III	0	0	1	0,3	-0,5	0,1	6	
Z	0	0	0	-1,3	-0,5	-0,1	G - 266	

30	

Aufgabe 7: Kurvenuntersuchung ganzrationaler Scharfunktionen

Die Firma Rutschikon hat ein besonderes Modell für Wasserrutschen in verschiedenen Formen konzipiert;

das seitliche Profil wird jeweils durch den Graphen der Funktionenschar f_k mit der Gleichung

$$f_k(x) \quad = \quad -\frac{1}{4k^2}x^3 + \frac{3}{4}x \quad mit\ k \in [3;4]$$

modelliert. Die Werte für x und die Funktionswerte liegen in Metern vor.

Gerutscht wird von der Startposition **P(- 8 / 6,5)** ;
am Ursprung endet die Rutsche und man wird sozusagen ins Becken katapultiert.

a) Für welchen Wert von k wurde der Startpunkt entworfen?

b) In welchem Intervall verläuft die Profillinie der Rutsche unterhalb der Wasseroberfläche?

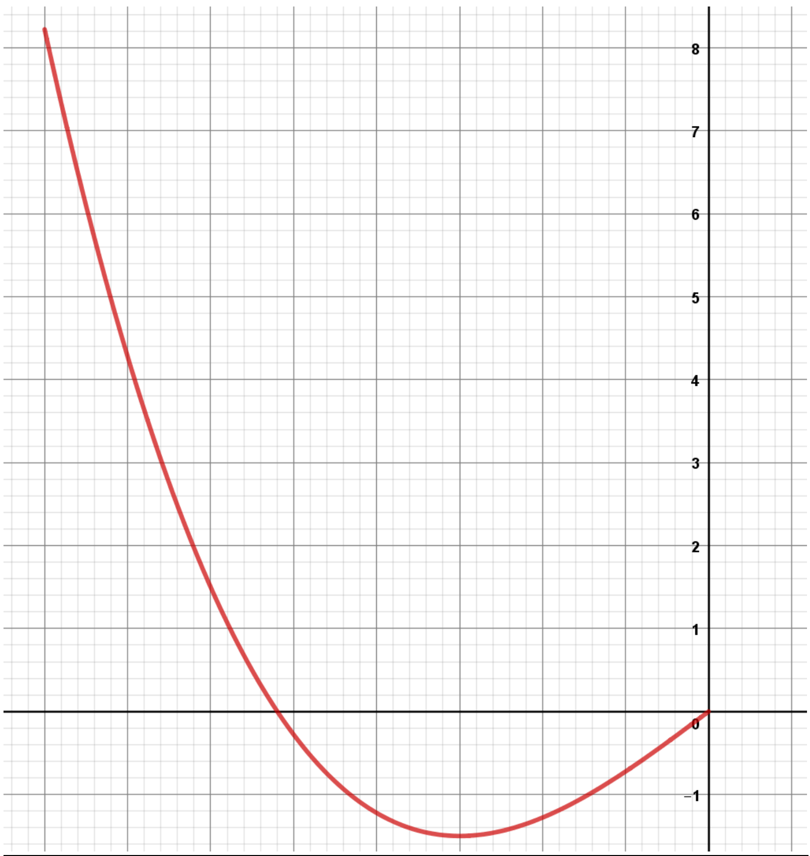
c) Ermitteln Sie die Koordinaten des tiefsten Punkts des Wasserrutschen-Profils.
Zeigen Sie auch, dass Ihr Punkt ein Minimum darstellt.

d) Berechnen Sie die Gleichung aller Tiefpunkte von $f_k(x)$.

e) Bestimmen Sie den Wert von k, für den die Wasserrutsche im Startpunkt die Steigung m = -3 hat und die Höhe über der Wasseroberfläche in diesem Punkt.

f) Zeigen Sie, dass alle Wasserrutschenprofile der Funktion $f_k(x)$ im Ursprung dieselbe Steigung haben und geben Sie diese Steigung in Prozent und Grad an.

g) Wie groß ist die Seitenprofilfläche der Wasserrutschte unterhalb der Wasseroberfläche für k = 3?



$$f_k(x) \quad = \quad -\frac{1}{4k^2}x^3+\frac{3}{4}x \quad mit\ k\in[3;4]$$

a) Parameter bestimmen

$$f_k(-8) \quad = \quad -\frac{1}{4k^2}(-8)^3+\frac{3}{4}(-8) \quad = \quad 6{,}5$$

$$\rightarrow \frac{128}{k^2}-6 \quad = \quad 6{,}5 \quad \rightarrow \quad \frac{128}{k^2} \quad = \quad 12{,}5 \quad \rightarrow \quad \frac{128}{12{,}5} \quad = \quad k^2 \quad \rightarrow \quad 10{,}24 \quad = \quad k^2 \quad \rightarrow \quad k \quad = \quad 3{,}2$$

b) Nullstellen:

$$0 \quad = \quad \left(-\frac{1}{4k^2}x^2+\frac{3}{4}\right)x \quad \rightarrow \quad x_1=0 \quad und \quad x_{2/3}=\pm k\sqrt{3}$$

c) Tiefpunkt:

$$f_k'(x) \quad = \quad -\frac{3}{4k^2}x^2+\frac{3}{4} \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x_{1/2}=\pm k \quad \rightarrow \quad hier: x=-k$$

$$f_k''(x) \quad = \quad -\frac{3}{2k^2}x \quad \rightarrow \quad f_k''(-k)=-\frac{3}{2k^2}(-k)=\frac{3}{2k}>0$$

$$f_k(-k) \quad = \quad -\frac{1}{4k^2}(-k)^3+\frac{3}{4}(-k) \quad = \quad \frac{1}{4}k-\frac{3}{4}k \quad = \quad -\frac{1}{2}k \quad \rightarrow \quad Min\left(-k \;\middle|\; -\frac{1}{2}k\right)$$

d) Ortskurve der Minima:

$$hier: \quad x=-k \quad \rightarrow \quad k=-x \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}k \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}(-x)=\frac{1}{2}x$$

e) Ermittlung Startpunkt:

$$f_k'(x) \quad = \quad -\frac{3}{4k^2}x^2+\frac{3}{4} \quad = \quad m \quad \rightarrow \quad -\frac{3}{4k^2}\cdot 64+\frac{3}{4}=-3 \quad \rightarrow \quad \frac{64}{5}=12{,}8=k^2 \quad \rightarrow \quad k=3{,}58$$

$$f_{\sqrt{12{,}8}}(-8) \quad = \quad -\frac{1}{4\cdot 12{,}8}(-8)^3+\frac{3}{4}(-8) \quad = \quad 4$$

f) Steigung im Ursprung:

$$f_k'(0) \quad = \quad \frac{3}{4} \quad = \quad 0{,}75 \quad \rightarrow \quad \frac{75}{100}=75\% \quad \rightarrow \quad 0{,}75=\tan(\alpha) \quad \rightarrow \quad \alpha=40{,}97$$

g) Fläche unterhalb der Wasseroberfläche für k = 3:

$$\int_{-3\sqrt{3}}^{0} f_3(x)\,dx \quad = \quad \left|\int_{-3\sqrt{3}}^{0}\left(-\frac{1}{36}x^3+\frac{3}{4}x\right)dx\right| \quad = \quad \left|\left[-\frac{1}{144}x^4+\frac{3}{8}x^2\right]_{-3\sqrt{3}}^{0}\right|$$

$$= \quad \left|\left[-\frac{1}{144}\cdot 27^2+\frac{3}{8}\cdot 27\right]\right| \quad = \quad 5{,}0625$$