

Thema: Integralrechnung; Fläche zwischen Fkt.;
Stammfunktionen; Flächen mit x-Achse;
Rotationsvolumina

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:

Punkte:

Note:

Aufgabe 1: Stammfunktionen & Ableitungen

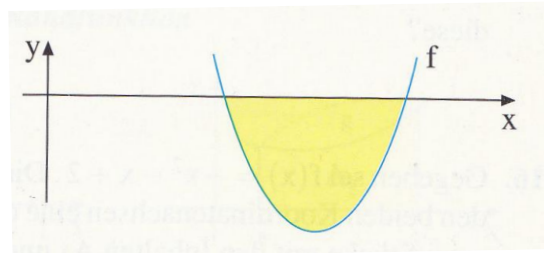
18

Füllen Sie die Tabelle aus:

Aufgabe	F(x)	f(x)	f'(x)
a)			$f'(x) = \frac{2}{3}x + 6$
b)		$f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{4}x^{1,5}$	
c)		$f_k(x) = \frac{1}{x^2} - k$	

Aufgabe 2: Fläche mit der x-Achse

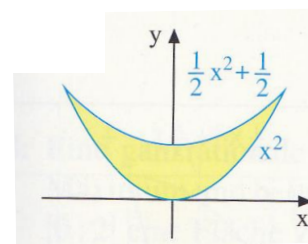
Die Parabel zu $f(x) = 2x^2 - 9x + 9$ schließt mit der x-Achse die angezeigte Fläche ein. Wie groß ist deren Inhalt?



8

Aufgabe 3: Fläche zwischen Funktionen

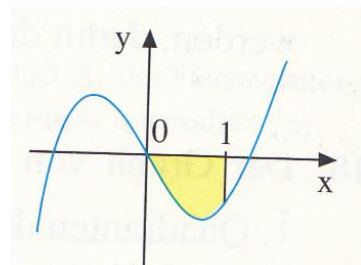
Gesucht ist der Inhalt der abgebildeten Fläche:



8

Aufgabe 4: Parameter gesucht

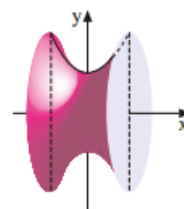
Wie muss $k > 0$ für $f_k(x) = kx^3 - k^2x$ gewählt werden, damit die markierte Fläche den Inhalt $A = 7$ besitzt?



8

Aufgabe 5: Rotationsvolumen

$f(x) = x^2 + 1$ mit $D = [-1; 1]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens.



8

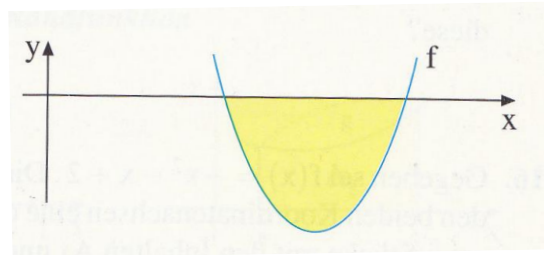
Aufgabe 1: Stammfunktionen & Ableitungen

Füllen Sie die Tabelle aus:

Aufgabe	F(x)	f(x)	f'(x)
a)	$F(x) = \frac{1}{9}x^3 + 3x^2 + cx + d$	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + c$	$f'(x) = \frac{2}{3}x + 6$
b)	$F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}} + c$	$f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{4}x^{1,5}$	$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{8}x^{0,5}$
c)	$F_k(x) = -\frac{1}{x} - kx + c$	$f_k(x) = \frac{1}{x^2} - k$	$f_k'(x) = -\frac{2}{x^3}$

Aufgabe 2: Fläche mit der x-Achse

Die Parabel zu $f(x) = 2x^2 - 9x + 9$ schließt mit der x-Achse die angezeigte Fläche ein. Wie groß ist deren Inhalt?



Nullstellen:

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 9 = 0 \rightarrow x_{\frac{1}{2}} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} \rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \text{ und } x_2 = 3$$

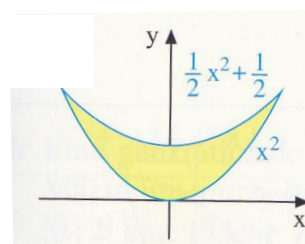
Fläche:

$$\left| \int_{1,5}^3 f(x) dx \right| = \left| \int_{1,5}^3 (2x^2 - 9x + 9) dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x \right]_{1,5}^3 \right|$$

$$= \left| (18 - 40,5 + 27) - (2,25 - 10,125 + 13,5) \right| = |4,5 - 5,625| = 1,125$$

Aufgabe 3: Fläche zwischen Funktionen

Gesucht ist der Inhalt der abgebildeten Fläche:



Schnittstellen:

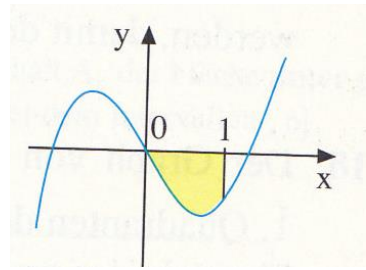
$$f(x) = g(x) \rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = x^2 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow 1 = x^2 \rightarrow 1 = |x|$$

Fläche zwischen Funktionen:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 d(x) dx = 2 \cdot \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = 2 \cdot \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 4: Parameter gesucht

Wie muss $k > 0$ für $f_k(x) = kx^3 - k^2x$ gewählt werden, damit die markierte Fläche den Inhalt $A = 7$ besitzt?

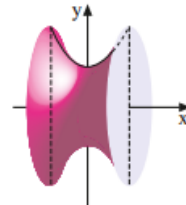


$$\int_0^1 f_k(x) dx = \int_0^1 (kx^3 - k^2x) dx = \left[\frac{1}{4}kx^4 - \frac{1}{2}k^2x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}k^2 = -7$$

$$\xrightarrow{\text{quadratische Gleichung}} -2k^2 + k + 28 = 0 \rightarrow k_{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+224}}{-4} = \frac{-1 \pm 15}{-4} \rightarrow k_1 = -\frac{7}{2} \text{ und } k_2 = 4$$

Aufgabe 5: Rotationsvolumen

$f(x) = x^2 + 1$ mit $D = [-1; 1]$ rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens.



$$f(x) = x^2 + 1 \text{ mit } D = [-1; 1]$$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 f^2(x) dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{56}{15} \cdot \pi$$