12. Jgst.	5. Test	Datum: 06.05.2022
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Matrizenrechnung; LGS; Lösungsverhalten**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Matrizenrechnung - Ermitteln Sie die Lösungen der Matrizenaufgaben **18**

$$B=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

E = Einheitsmatrix

a) [2B – 4D] * E **b) k*B + D^2 – E^{100}** **c) D * B**

Lösung:

$$\text{Allgemein}: \quad (2B-4D)\cdot E \quad = \quad 2B-4D$$

$$\rightarrow \quad 2\cdot\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2k & 2 & 4 \\ 0 & 2k & 6 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4k & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 4k \\ 4 & 4k & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2k & 2 & -4 \\ 0 & 2k-4 & 6-4k \\ -6 & -4-4k & 8 \end{pmatrix}$$

$$k\cdot B + D^2 - E^{100}$$

$$\rightarrow \quad k\cdot\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} k^2 & k & 2k \\ 0 & k^2 & 3k \\ -k & -2k & 4k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2+2 & 2k & 2k \\ k & k^2+1 & k \\ k & k & k^2+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k^2+1 & 3k & 4k \\ k & 2k^2 & 4k \\ 0 & -k & k^2+4k+1 \end{pmatrix}$$

$$D\cdot B \quad = \quad \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} k^2-2 & k-4 & 2k+8 \\ -k & -k & 4k+3 \\ k & k^2+1 & 3k+2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: **Determinanten: Bestimmen Sie die Determinanten zu folgenden Matrizen** | **10** | |

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & k & -k \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Det(A) = \left| \begin{array}{ccc:c:c} k & 0 & 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 1 & k \end{array} \right| \overset{Sarrus}{=} 0+0+0-2-k^3-0 = -2-k^3$$

$$Det(B) = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & k & -k \end{vmatrix} \underset{\substack{Entwicklung \\ (Zeile\,1)}}{\overset{Laplace-}{=}} k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & k & -k \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & k & -k \end{vmatrix} + 0 - 0$$

$$Det(B) = k \cdot [-3k+0+0-0-0-0] - 1 \cdot [0+0-k^2-6k-0-0]$$

$$Det(B) = -3k^2+k^2+6k = -2k^2+6k$$

| **22** | |

Aufgabe 3: **Lineare Gleichungssysteme**

a) Was versteht man unter einem homogenen LGS?

Unter einem homogenen LGS versteht man ein LGS bei der die Ergebnisspalte der Nullvektor ist. Bei einem inhomogenen System ist der Ergebnisvektor ungleich dem Nullvektor.

b) Nennen Sie zwei Unterschiede zwischen homogenem und inhomogenem LGS.

Unterschiede:

hLGS: **Nullvektor als Ergebnisspalte;**

entweder triviale Lösung oder unendliche Lösungsmenge;

$$Rang\left(A \mid \vec{b}\right) = Rang(A)$$

ihLGS: **kein Nullvektor als Ergebnisspalte;**

eindeutige, mehrdeutige oder keine Lösung;

$$Rang\left(A \mid \vec{b}\right) \geq Rang(A)$$

c) Lineares Gleichungssystem I

Gegeben sei folgendes LGS: $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} k & 4 \\ -2 & k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k \\ 1 \end{pmatrix}$

i) Berechnen Sie Det(A)

ii) Ermitteln Sie die Lösung des LGS in Abhängigkeit von k mit Hilfe der Cramer-Regel.

iii) Für welche Werte von k ist A singulär (= nicht invertierbar)?

Lösung:

$$Det(A) = \begin{pmatrix} k & 4 \\ -2 & k^2 \end{pmatrix} = k^3 + 8 \xrightarrow{iv} k^3 + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad k = -2$$

Für k = -2 ist die Matrix singulär, d.h. es existiert keine Inverse.

LGS:

$$A_k \cdot \vec{x} = \overrightarrow{b_k} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} k & 4 \\ -2 & k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{\det\begin{pmatrix} 4k & 4 \\ 1 & k^2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} k & 4 \\ -2 & k^2 \end{pmatrix}} = \frac{4k^3 - 4}{k^3 + 8} \quad und \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} k & 4k \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} k & 4 \\ -2 & k^2 \end{pmatrix}} = \frac{k + 8k}{k^3 + 8} = \frac{9k}{k^3 + 8}$$

d) Lineares Gleichungssystem II

Gegeben sei folgendes LGS: $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 0{,}5 & 2 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

i) Für welche Werte von k hat das LGS eine mehrdeutige (unendliche) Lösung?

ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS für k = 3.

Lösung:

$$Det(A_k) = \begin{vmatrix} -1 & k & 1 \\ 0{,}5 & 2 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} k^2 - k - 6 \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad k_1 = 3 \quad und \quad k_2 = -2$$

Es muss eine unendliche Lösungsmenge vorliegen, da es sich um ein homogenes LGS handelt.

Für k = 3:

$$A_3 \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0{,}5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauß} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad mit \lambda \in \Re$$