12. Jgst.	7. Test	Datum: 15.06.2022
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Lineare Optimierung (Simplex-Verfahren)**

Name:	
Punkte:	Note:

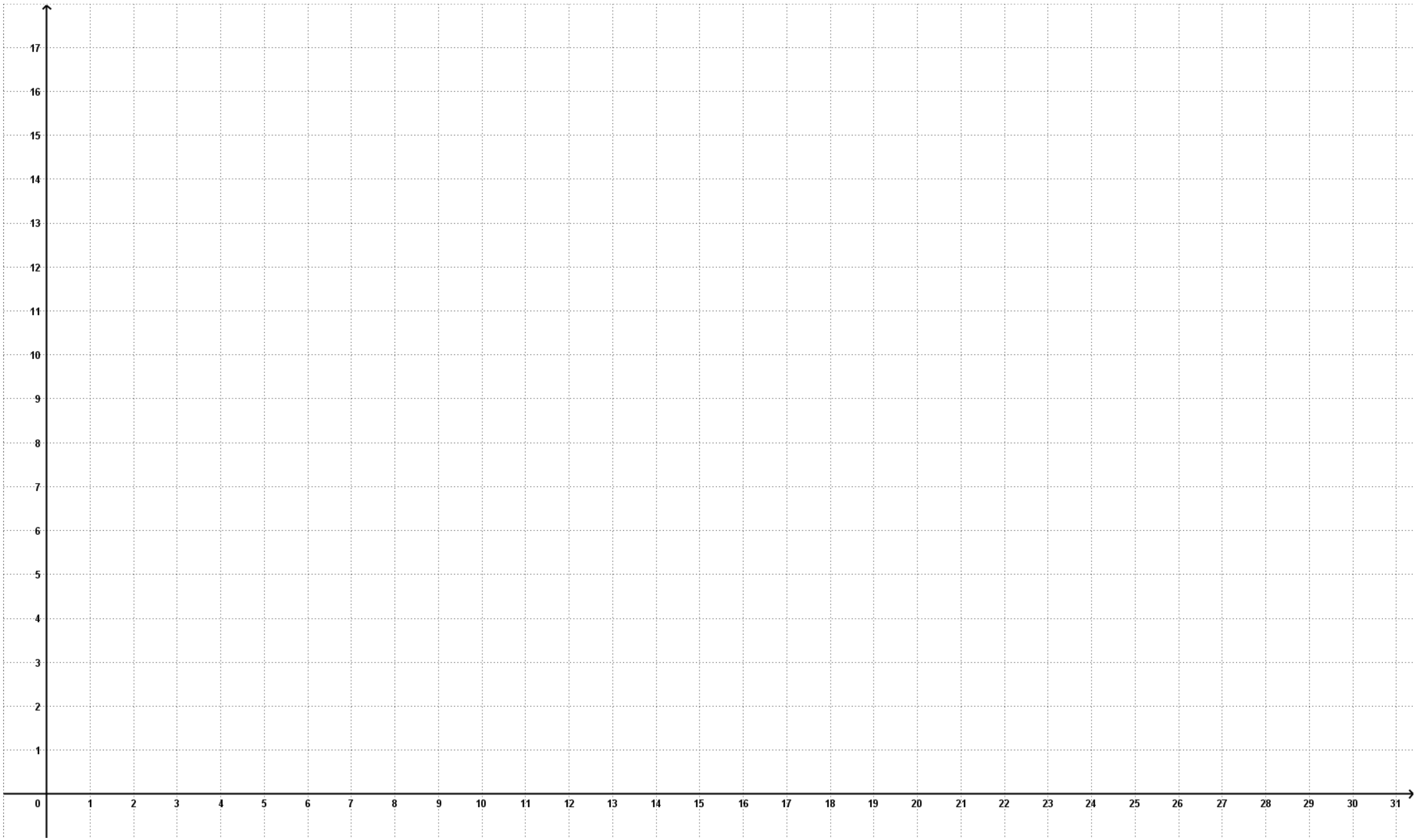
Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Simplexalgorithmus** **30**

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x+8y & \leq & 80 \\ (2) & 4x+15y & \leq & 120 \\ (3) & 10x+8y & \leq & 120 \\ \hline ZF & f(x,y) = 12x+10y & \to & \max. \end{array}$$

Erstellen Sie die **graphische *<u>und</u>* die analytische** Lösung.

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							
I							
II							
III							
Z							


17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

20	

Aufgabe 2: **Graphische Lösung**

Ein altmodischer Spielzeughersteller produziert lediglich die beiden Spiele A und B. Der Gewinn pro ME von Spiel A beträgt 4 GE. Bei Spiel B kann ein Gewinn von 5 GE pro ME erzielt werden. Die Produktion eines Spieles der Sorte A erfordert 4 Minuten für Bearbeitung, 3 Minuten für Montage und 6 Minuten für Verpackung. Die Produktion eines Spieles der Sorte B erfordert 4 Minuten für Bearbeitung, 6 Minuten für Montage und 4 Minuten für Verpackung. Dem Spielzeughersteller stehen 52 Minuten für Bearbeitung, 60 Minuten für Montage und 72 Minuten für Verpackung zur Verfügung. Er ist bestrebt den Gesamtgewinn aus der Herstellung und dem Verkauf beider Spiele zu maximieren. Der Absatz beider Spiele kann dabei als sicher angenommen werden. Es gelten darüber hinaus die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen.

a)

Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Spielzeugherstellers durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).

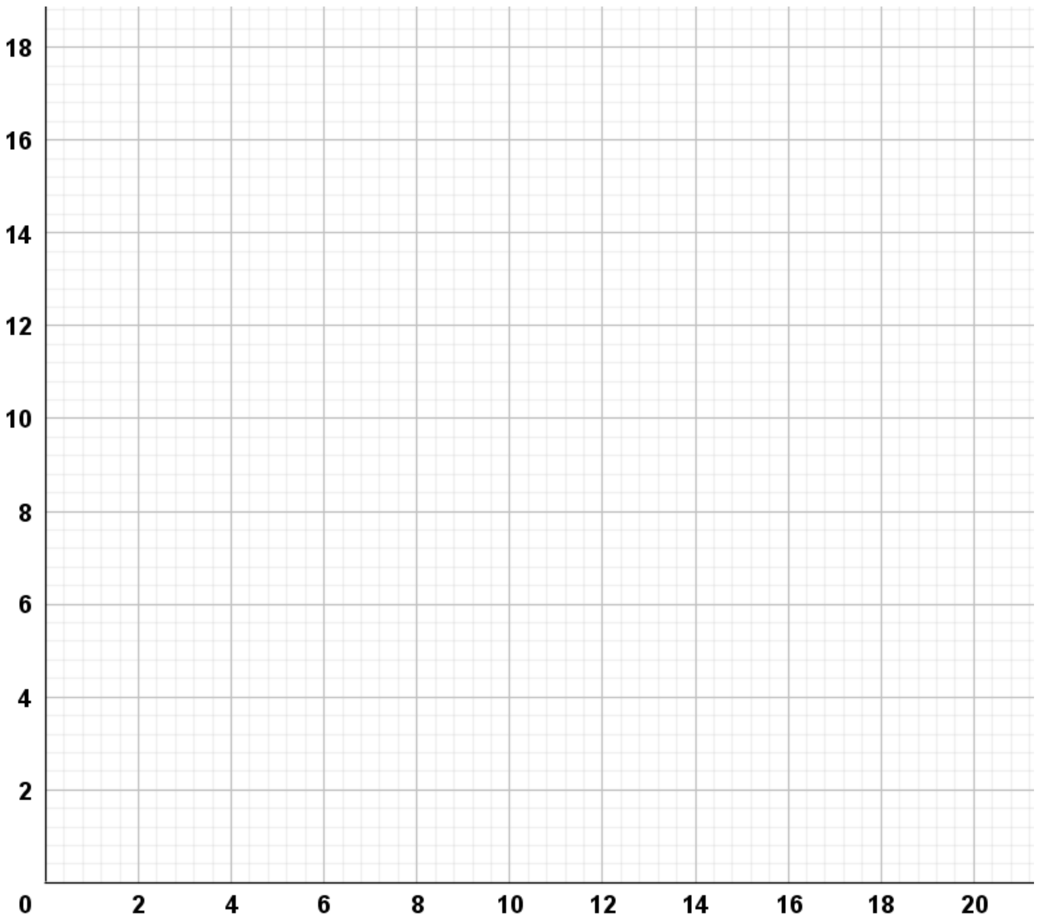
b)

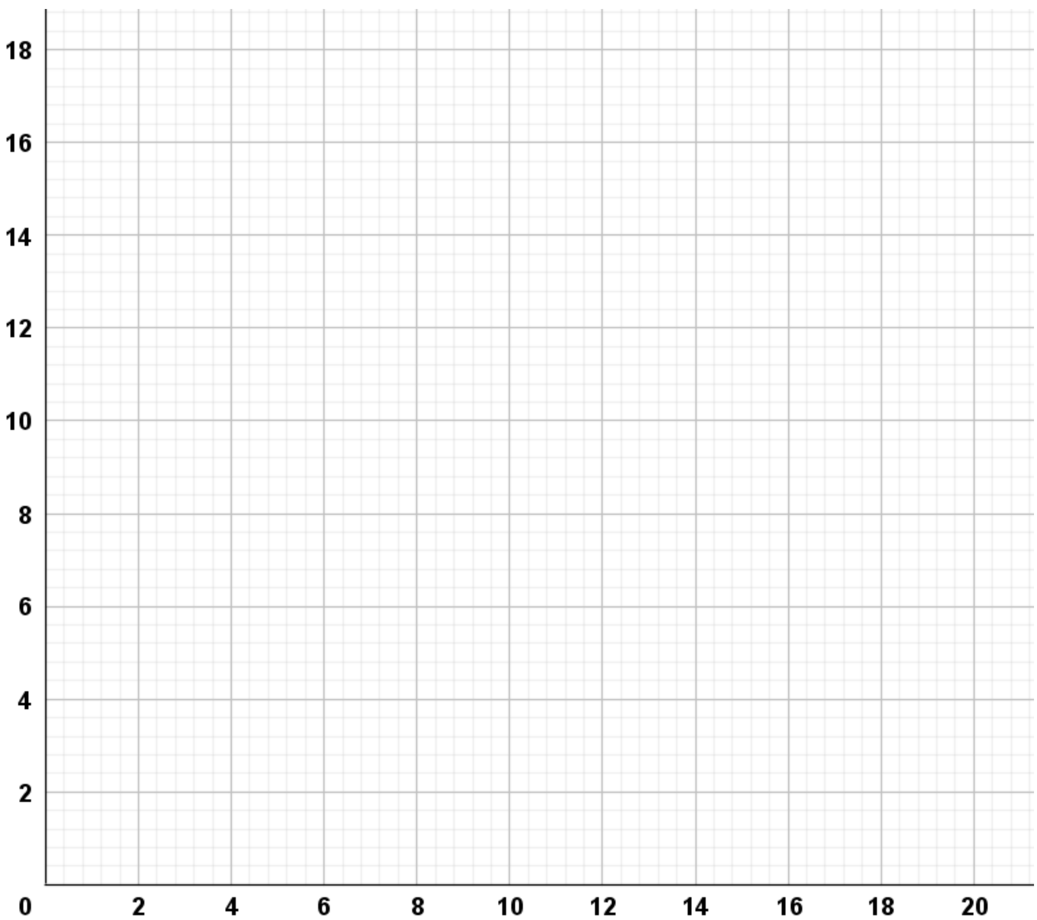
Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Sorten von Spielen (Möglichkeitenmenge) für den Spielzeughersteller ablesen lässt.

Lösen Sie das Maximierungsproblem des Spielzeugherstellers aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isogewinnlinien. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Kombination von Spielen beider Sorten.

c)

Welche der drei Restriktionen aus Teilaufgabe a) ist im Gewinnmaximum nicht bindend?
Wie groß ist die freie Kapazität der betreffenden Ressource?
Wie würde man diese im „fertigen" Simplextableau erkennen können? (zwei Hinweise)


18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

2 a) Markieren Sie im folgenden Ausgangstableau mit $x_1, x_2, u_1, u_2, u_3 \geq 0$ die Pivot-Spalte und die Pivot-Zeile und ergänzen Sie:
Die Pivot-Spalte wird durch ______________________________ festgelegt, die Pivot-Zeile durch ______________________________. Das Pivot-Element heißt __________.

b) Teilen Sie die Elemente der Pivot-Zeile durch das Pivot-Element und tragen Sie das Ergebnis in Zeile (6) ein.
Alle anderen Elemente in der Pivot-Spalte müssen null werden.

c) Die Rechenvorschrift für die fünfte Zeile heißt:
(5) = −12 · (6) + (1). Damit gilt z. B. $-12 \cdot \frac{11}{16} + 9 = \frac{3}{4}$.
Ergänzen Sie die Elemente der Zeile (5) nach dieser Rechenvorschrift.

d) Welcher Wert ist in der Rechenvorschrift (7) = ______ · (6) + (3) zu ergänzen? Berechnen Sie die fehlenden Werte im Tableau.

e) Ergänzen Sie die Rechenvorschrift (8) = ______ · (   ) + (   ) und die fehlenden Werte im Tableau.

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3		
u_1	9	12	1	0	0	1080	(1)
u_2	11	16	0	1	0	880	(2)
u_3	8	10	0	0	1	595	(3)
	60	80	0	0	0	z	(4)

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3		
u_1	$\frac{3}{4}$	0					(5) = −12 · (6) + (1)
x_2	$\frac{11}{16}$	1					(6) = $\frac{1}{16}$ · (2)
u_3		0					(7) = ______ · (6) + (3)
		0					(8) = ____ · (___) + (___)

f) Führen Sie den Simplex-Algorithmus noch einmal durch und geben Sie den maximalen Wert von z an.

3 Ein Maximierungsproblem führt auf nebenstehendes Tableau mit $x, y, u_1, u_2 \geq 0$.

	x	y	u_1	u_2		
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	200	(1)
u_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	100	(2)
	10	0	−20	0	z − 8000	(3)

a) Welcher z-Wert wird im Augenblick erzielt? ________

b) Ist dieser z-Wert der maximale? Begründen Sie.

____

c) Bestimmen Sie das Pivot-Element und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise:

____

____

____

d) Teilen Sie die Elemente der Pivot-Zeile durch das Pivot-Element und tragen Sie ein.

e) Ergänzen Sie die Rechenvorschriften. Berechnen Sie die übrigen Elemente des Tableaus und tragen Sie ein.

f) Welche Werte nehmen x und y im Maximum an?

x = ____________________ y = ____________________

	x	y	u_1	u_2		
						(4) = __________
						(5) = __________
						(6) = __________

Aufgabe 133

Ein Dozent hält Vorlesungen in den Fachrichtungen Jura und BWL. Die Aufteilung der Lehrtätigkeit auf die beiden Fachrichtungen ermittelt der Dozent mit Methoden der linearen Optimierung. Ihm stehen pro Monat 48 Stunden zur Verfügung, um seine Vorlesungen zu halten. Zudem verfügt der Dozent monatlich über 54 Stunden zur Vorbereitung der Vorlesungen. Sowohl Jura-Vorlesungen, als auch BWL-Vorlesungen haben eine Dauer von jeweils 4 Stunden. Für die Vorbereitung einer Jura-Vorlesung benötigt er 3 Stunden, während eine BWL-Vorlesung in 6 Stunden vorbereitet ist. Der Dozent muss darüber hinaus mindestens 2 und maximal 9 Jura-Vorlesungen pro Monat halten. Er erzielt einen Gewinn von 36 GE für jede gehaltene Jura-Vorlesung und 72 GE für jede gehaltene BWL-Vorlesung. Der Dozent ist bestrebt, den monatlichen Gesamtgewinn aus seiner Lehrtätigkeit zu maximieren. Die Auftragslage des Dozenten kann dabei als sicher angenommen werden. Zudem ist die übliche Nichtnegativitätsbedingung für BWL-Vorlesungen einzuhalten.

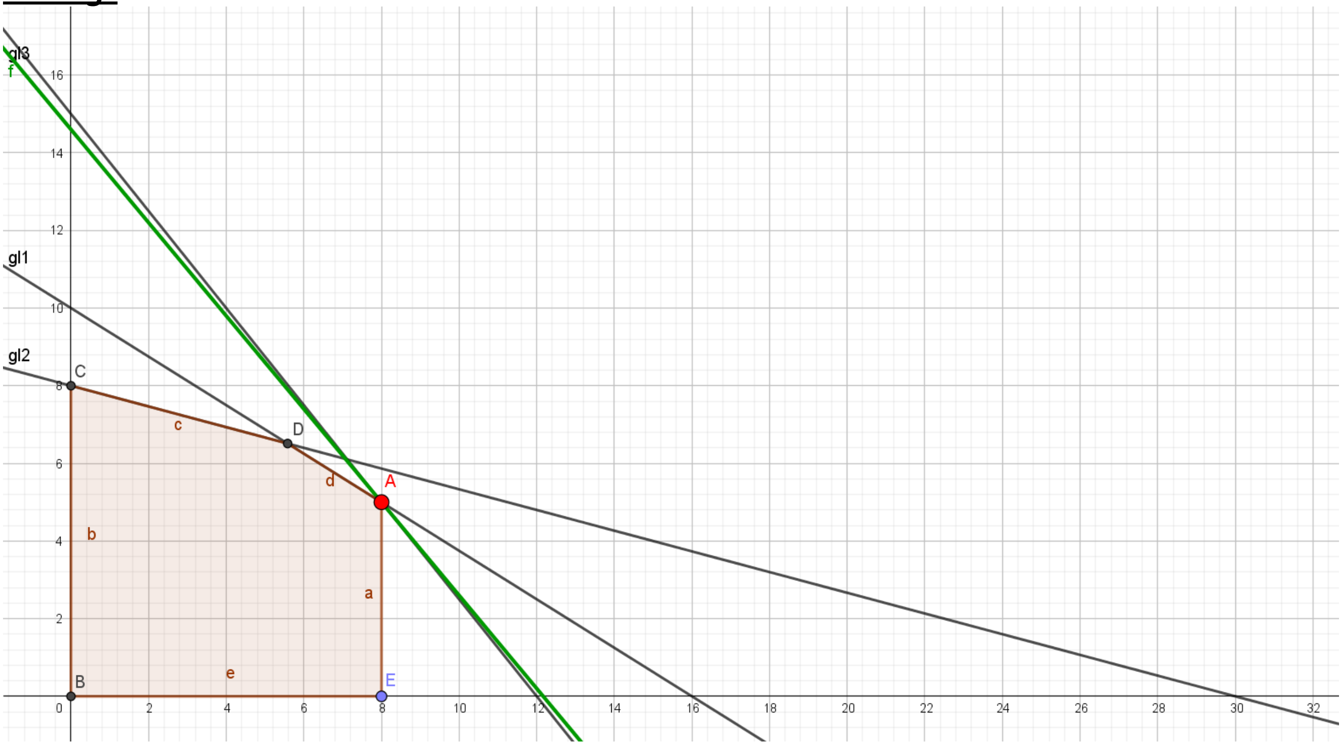
a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Dozenten durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).
b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Vorlesungen (Möglichkeitenmenge) für den Dozenten ablesen lässt.
c) Lösen Sie das Maximierungsproblem des Dozenten aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isogewinnlinien. Welche Aufteilung der beiden Vorlesungen sollte der Dozent wählen?
d) In Abwandlung zur bisherigen Aufgabenstellung kann der Dozent einen Gewinn von 45 GE je gehaltener Jura-Vorlesung und 60 GE je gehaltener BWL-Vorlesung erzielen, bei ansonsten gleichen Prämissen. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Aufteilung der beiden Vorlesungen.
e) In Abwandlung zur bisherigen Aufgabenstellung kann der Dozent einen Gewinn von 50 GE je gehaltener Jura-Vorlesung und 40 GE je gehaltener BWL-Vorlesung erzielen, bei ansonsten gleichen Prämissen. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Aufteilung der beiden Vorlesungen.

Aufgabe 135

Ein altmodischer Spielzeughersteller produziert lediglich die beiden Spiele A und B. Der Gewinn pro ME von Spiel A beträgt 4 GE. Bei Spiel B kann ein Gewinn von 5 GE pro ME erzielt werden. Die Produktion eines Spieles der Sorte A erfordert 4 Minuten für Bearbeitung, 3 Minuten für Montage und 6 Minuten für Verpackung. Die Produktion eines Spieles der Sorte B erfordert 4 Minuten für Bearbeitung, 6 Minuten für Montage und 4 Minuten für Verpackung. Dem Spielzeughersteller stehen 52 Minuten für Bearbeitung, 60 Minuten für Montage und 72 Minuten für Verpackung zur Verfügung. Er ist bestrebt den Gesamtgewinn aus der Herstellung und dem Verkauf beider Spiele zu maximieren. Der Absatz beider Spiele kann dabei als sicher angenommen werden. Es gelten darüber hinaus die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen.

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Spielzeugherstellers durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).
b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Sorten von Spielen (Möglichkeitenmenge) für den Spielzeughersteller ablesen lässt.
c) Lösen Sie das Maximierungsproblem des Spielzeugherstellers aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isogewinnlinien. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Kombination von Spielen beider Sorten.
d) Welche der drei Restriktionen aus a) ist im Gewinnmaximum aus c) nicht bindend und wie groß ist die freie Kapazität der betreffenden Ressource im Gewinnmaximum?

Lösung:



Simplexalgorithmus:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	5	8	1	0	0	80	
II	4	15	0	1	0	120	
III	10	8	0	0	1	120	0,1*III
Z	12	10	0	0	0	G	
I	5	8	1	0	0	80	I – 5*III
II	4	15	0	1	0	120	III– 4*III
III	1	0,8	0	0	0,1	12	
Z	12	10	0	0	0	G	Z– 12*III
I	0	4	1	0	- 0,5	20	0,25 * I
II	0	11,8	0	1	- 0,4	72	
III	1	0,8	0	0	0,1	12	
Z	0	0,4	0	0	- 1,2	G - 144	

I	0	1	0,25	0	- 0,125	5	
II	0	11,8	0	1	- 0,4	72	II – 11,8*I
III	1	0,8	0	0	0,1	12	III-0,8*I
Z	0	0,4	0	0	- 1,2	G - 144	Z-0,4*I
I	0	1	0,25	0	- 0,125	5	
II	0	0	- 2,95	1	1,075	13	
III	1	0	- 0,2	0	0,2	8	
Z	0	0	- 0,1	0	- 1,15	G - 146	

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \quad mit \quad G_{\max} = 146$$

$$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$