13. Jgst.	1. Kursarbeit	Datum: 07.10.2022
Kurs 13/1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Stochastik – Baumdiagramm/Pfadregeln; ZE/Ereignisse; Bed. W'keit; Vierfeldertafel; Erwartungswert; Totale W'keit/Bayes**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Mengen und Venn-Diagramme

Teil I: Kreuzen Sie die richtige Antwort an:

1. Für ein Laplace-Experiment gilt immer:

( ) Es hat genau zwei Ausgänge.

(**X**) Sind A und B Elementarereignisse eines Laplace-Experiments, dann gilt: P(A) = P(B)

( ) Alle Ereignisse eines Laplace-Experiments haben die gleiche Wahrscheinlichkeit.

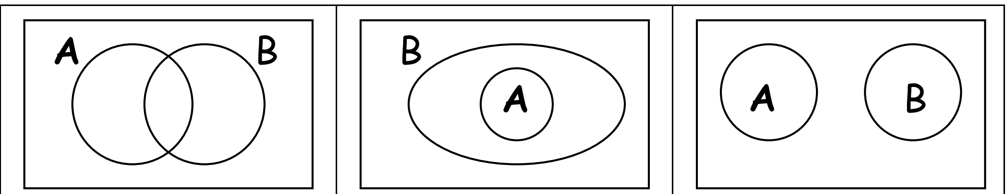
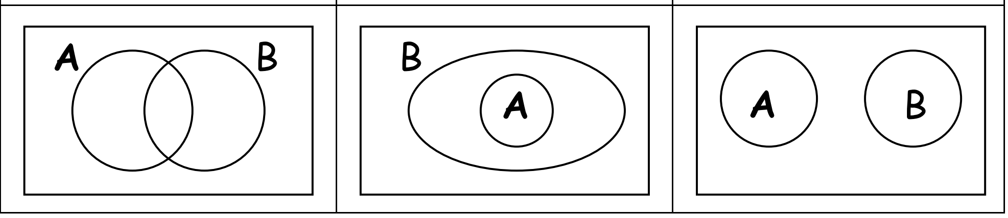
( ) Ist E ein Elementarereignis, dann ist P(E) = 1.

( ) Ist P(E) = 0,5 dann muss E ein Elementarereignis sein.

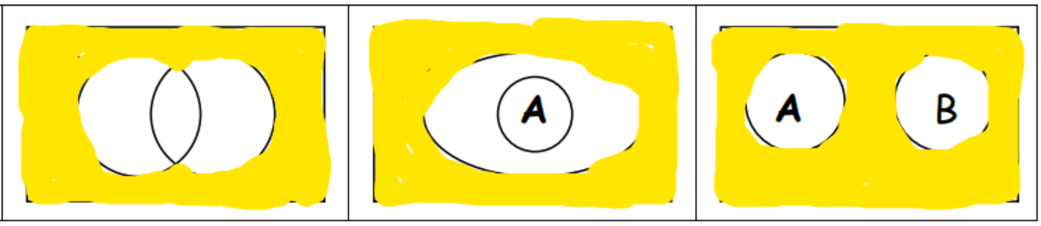
( ) Keine der vorstehenden Antworten ist richtig.

Teil II: Ereignisse in Venn-Diagrammen

Schraffieren Sie jeweils in den folgenden drei Diagrammen die Ereignisse:

$A \cup \overline{B}$	
$\overline{A} \setminus B$	

Lösung:

$A \cup \overline{B}$	
$\overline{A} \setminus B$	

Teil III: **Mengendiagramme & Mengenlehre**

Ein Würfel wird einmal geworfen. Die Ereignisse sind wie folgt:

A = { „die Augenzahl ist kleiner als 3“ } und B = { „die Augenzahl ist ungerade“ }

Ermitteln Sie nun die folgenden verknüpften Ereignisse:

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $A \cap \overline{B}$

Lösung: A = { 1; 2 } und B = { 1; 3; 5 }

$$A \cap B = \{1\} \qquad A \cup B = \{1;2;3;5\} \qquad A \cap \overline{B} = \{2\}$$

Teil IV: **Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeiten I**

Gegeben sei eine Ergebnismenge: $\Omega = \{1;2;3;4\}$

Berechnen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(1) \quad wenn\ gilt: \quad P(2) = \frac{1}{2}; P(3) = \frac{1}{4}; P(4) = \frac{1}{12}$

Lösung:

$$P(1) = 1 - P(2) - P(3) - P(4)$$

$$P(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 1 - \frac{6+3+1}{12} = 1 - \frac{10}{12} = \frac{1}{6}$$

b) $P(1)\ und\ P(2) \quad wenn\ gilt: \quad P(3) = \frac{1}{5}; P(4) = \frac{1}{8}; P(1) = 2 \cdot P(2)$

Lösung:

$$P(1) + P(2) = 1 - P(3) - P(4) \xrightarrow{P(1)=2\cdot P(2)} 3P(2) = 1 - P(3) - P(4)$$

$$3P(2) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = 1 - \frac{13}{40} = \frac{27}{40} \rightarrow P(2) = \frac{9}{40} \xrightarrow{P(1)=2\cdot P(2)} P(1) = \frac{9}{20}$$

Teil V: **Ergebnismengen und (bedingte) Wahrscheinlichkeiten II**

Für zwei Ereignisse A und B gelten folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{7}{16} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad und \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Berechnen Sie hieraus die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) $P(A \cup B)$ **b)** $P(\overline{A})$ **c)** $P_A(B)$

Lösung:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \rightarrow P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P_A(B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{16}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{7} = \frac{2}{7}$$

Aufgabe 2: Rechnen und Beweisen

Bearbeiten Sie die Fragestellungen mit Begründung bzw. mathematischer Beweisführung.

Teil I: Berechnen Sie folgende Ausdrücke: a) $\frac{102!}{100!}$ b) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

Lösung:

a) $\frac{102!}{100!} = 102 \cdot 101 = 10.302$ b) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$

Teil II: Beweisen Sie folgende Gleichungen:

(i) $P_B(A \cup B) = 1$ (ii) $P_\Omega(A) = P(A)$

Lösung:

$$\textit{Behauptung}: \; P_B(A \cup B) = 1$$

$$\textit{Beweis}:$$

$$P_B(A \cup B) = \frac{P[B \cap (A \cup B)]}{P(B)} = \frac{P[(B \cap A) \cup (B \cap B)]}{P(B)} = \frac{P[\varnothing \cup B]}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$\textit{Behauptung}: \; P_\Omega(A) = P(A)$$

$$\textit{Beweis}: \; P_\Omega(A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(\Omega)} \underset{\textit{sicheres Ereignis}}{\overset{P(\Omega)=1}{=}} \frac{P(A)}{1} = P(A)$$

Teil III: Bestimmen Sie den Wert für

(i) $P_A(A) = ???$ (ii) $P_{\overline{A}}(A) = ???$

Lösung:

$$P_A(A) = ???$$

$$P_A(A) = \frac{P[A \cap A]}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$P_{\overline{A}}(A) = ???$$

$$P_{\overline{A}}(A) = \frac{P[\overline{A} \cap A]}{P(\overline{A})} = \frac{0}{P(\overline{A})} = 0$$

Aufgabe 3: Zufallsexperimente und Ereignisse

Zwei achtseitige Würfel mit den Ziffern 1 bis 8 werden gleichzeitig geworfen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man dabei

a) einen Pasch?
b) ein Produkt der Augenzahlen von höchstens 5?
c) Zwei verschiedene Augenzahlen?
d) eine Summe der Augenzahlen von größer als 14

Lösung:

Insgesamt gibt es 64 Wertekombinationen.

$$P(\text{"}Pasch\text{"}) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{"Pr}odukt \leq 5\text{"}) = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

$$NR: \quad \{1;5 / 1;4 / 1;3 / 1;2 / 1;1 / 2;1 / 3;1 / 4;1 / 5;1 / 2;2\}$$

$$P(\text{"}verschieden\text{"}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(\text{"}Summe > 14\text{"}) = P(\text{"}Summe \geq 15\text{"}) = \frac{3}{64}$$

$$NR: \quad \{7;8 / 8;7 / 8;8\}$$

Aufgabe 4: Kombinatorik

Teil I: Im Lokal „Zur fetten Henne“ stehen für ein Festmenü 4 Vorspeisen, 3 Zwischengerichte, 10 Hauptspeisen und 5 Desserts zur Auswahl.
Wie viele Kombinationen aus je einer Vorspeise, einem Zwischengericht, einer Hauptspeise und einem Dessert können gebildet werden?

Lösung: 4*3*10*5 = 600 Kombinationen

Teil II: Bei einer Familienfeier im Lokal „Zur fetten Henne“ stößt jeder Gast mit jedem anderen Gast einmal mit einem Sektglas an. Insgesamt wurde **3.081 Mal** angestoßen.
Ermitteln Sie mit mathematischen Methoden, **<u>wie viele Gäste</u>** an der Familienfeier teilnahmen.

Lösung:

$$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} = 3.081 \rightarrow n^2 - n - 6.162 = 0$$

$$n_1 = 79 \quad und \quad n_2 = -78$$

Insgesamt sind es 79 Personen auf der Feier.

Teil III: a) Beim Abfahrtslauf starten 10 Skiläufer. Wie viele verschiedene Startfolgen sind möglich, wenn die 4 besten Läufer in der Gruppe A starten und 6 übrigen in Gruppe B?

Lösung: 4! * 6! = 17.280

Der Kilometerzähler eines Pkw. hat 5 Stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ...

b) ... insgesamt?
c) ... dass alle Stellen verschieden sind?

Lösung: b) 10^5 = 100.000 c) 10*9*8*7*6 = 30.240

Aufgabe 5: Pfadregel und Baumdiagramm I

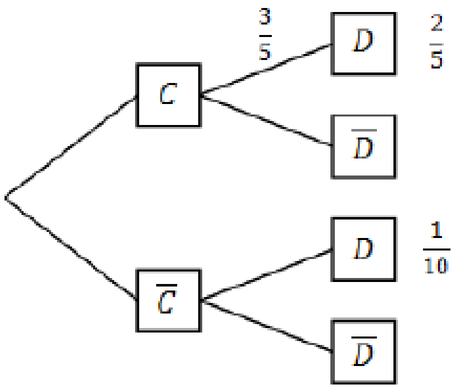
Gegeben ist das folgende Baumdiagramm zu den Ereignisse C und D:

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte des Baumdiagramms.

b) Berechnen Sie $P(\overline{D})$.

c) Beweisen Sie die Behauptung:
Die Ereignisse C und D sind voneinander abhängig.

d) Wie muss der Zahlenwert 0,1 geändert werden, damit die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind?



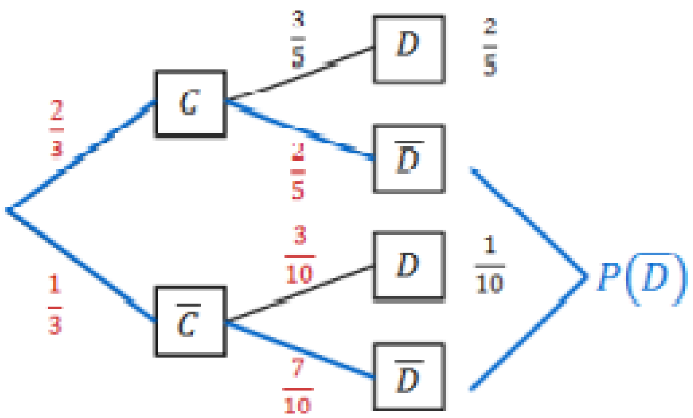
Lösung:

$$P(C)\cdot P_C(D) = P(C\cap D) \rightarrow P(C) = \frac{P(C\cap D)}{P_C(D)}$$

$$\rightarrow P(C) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow P(\overline{C}) = 1-P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{C})\cdot P_{\overline{C}}(D) = P(\overline{C}\cap D) \rightarrow P_{\overline{C}}(D) = \frac{P(\overline{C}\cap D)}{P(\overline{C})}$$

$$\rightarrow P_{\overline{C}}(D) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{1} = \frac{3}{10} \rightarrow P_{\overline{C}}(\overline{D}) = 1-P_{\overline{C}}(D) = \frac{7}{10}$$



$$P(\overline{D}) = P(C)\cdot P_C(\overline{D})+P(\overline{C})\cdot P_{\overline{C}}(\overline{D})$$

$$P(\overline{D}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10} = \frac{4}{15}+\frac{7}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$\textit{Behauptung}: \quad P(C)\cdot P(D) \neq P(C\cap D)$$

$$\textit{Beweis}: \quad P(C)\cdot P(D) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5} = P(C\cap D)$$

$$\text{Voraussetzung}: \quad P(C)\cdot P(D) \;=\; P(C\cap D)$$

$$P(D) \;=\; \frac{2}{5}+x \quad und \quad P(C\cap D) \;=\; \frac{2}{5} \quad und \quad P(C) \;=\; \frac{2}{3}$$

$$\text{Berechnung}:$$

$$P(C)\cdot P(D) \;=\; P(C\cap D) \;\rightarrow\; \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+x\right) \;=\; \frac{2}{5} \;\rightarrow\; x \;=\; \frac{1}{5}$$

Aufgabe 6: Pfadregel und Baumdiagramm II

Ein elektronisches Gerät ist aus 10 Elementen zusammengesetzt, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p arbeiten.
Ist mindestens ein Element defekt, dann arbeitet das Gerät bereits nicht mehr.
Wie groß muss p mindestens sein, damit das Gerät mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von **<u>mindestens 90 % funktioniert</u>**?

Lösung: $$p^{10} \;\geq\; 0{,}9 \;\xrightarrow{\sqrt[10]{p}}\; p \;\geq\; \sqrt[10]{0{,}9} \;=\; 0{,}9895$$

Aufgabe 7: Pfadregel und Baumdiagramm III

In einer Packung sind 10 Glühlampen, davon sind zwei defekt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn **<u>drei</u>** Glühlampen "blind" **<u>ohne Zurücklegen</u>** herausgegriffen werden?

a) A: „Alle drei Glühlampen sind in Ordnung."

Lösung: $$P(X=3) \;=\; \frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8} \;=\; \frac{7}{15}$$

b) B: „Mindestens eine Glühlampe ist defekt."

Lösung: $$P(Y\geq 1) \;=\; 1-P(Y=0) \;=\; 1-\frac{7}{15} \;=\; \frac{8}{15}$$

Nun ist die Anzahl der defekten Glühbirnen der 10er-Packung nicht bekannt.
Untersucht wird das Ereignis C: „Genau zwei Glühlampen sind defekt."

c) Analysieren den Ansatz und erklären Sie, was in diesem Zusammenhang die Variable x darstellt:

$$P(C) \;=\; 3\cdot\frac{x}{10}\cdot\frac{x-1}{9}\cdot\frac{10-x}{8}$$

Lösung: $$P(Z=2) \;=\; \frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{8} \;=\; \frac{1}{15}$$

d) Wie viele Lampen müssten mindestens defekt sein, damit bei Ereignis C ein Ergebnis von mindestens $^4/_{15}$ entsteht?

$$x \;:=\; \text{Anzahl der defekten Glühbirnen}$$

Lösung:

$$P(R=2) \;=\; 3\cdot\frac{x}{10}\cdot\frac{x-1}{9}\cdot\frac{10-x}{8} \;\geq\; \frac{4}{15}$$

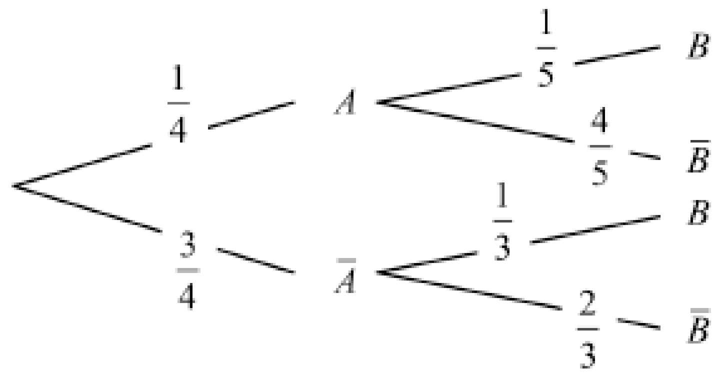
$$\Rightarrow\; -x^3+11x^2-10x-64 \;=\; 0$$

$$\xrightarrow{Newton}\; x_1=-1{,}87\,[\text{nicht relevant}] \;\wedge\; x_2=3{,}74 \;\wedge\; x_3=9{,}14$$

Daher müssen es mindestens 4 defekte Glühbirnen sein!

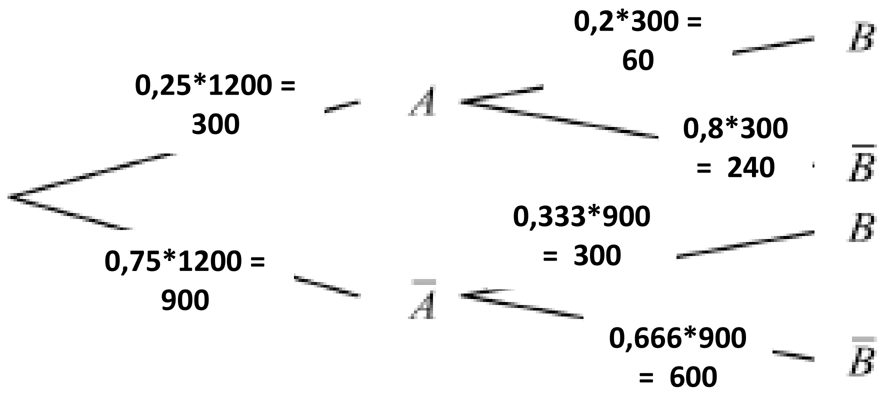
Aufgabe 8: Vierfeldertafel und Baumdiagramm => Bedingte Wahrscheinlichkeit I

Gegeben ist folgendes Baumdiagramm:



a) Schreiben Sie das Diagramm auf mit absoluten Zahlen bei einer Gesamtversuchszahl von N = 1.200.

Lösung:



b) Erstellen Sie auf der Basis der Wahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms eine Vierfeldertafel.

Lösung:

	B	$\overline{B}$	**Σ**
A	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\overline{A}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
Σ	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	**1**

c) Bestimmen Sie das umgekehrte Baumdiagramm.

Lösung:

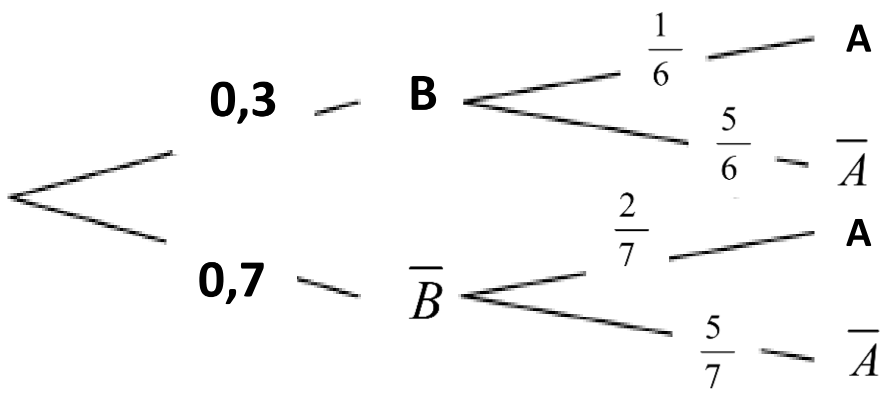
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P_B(A) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) \rightarrow P_B(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \rightarrow P_{\overline{B}}(A) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2}{7}$$

$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - P_B(A) \rightarrow P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Lösung:



Aufgabe 9: Tablets im Test

Der vollgeladene Akku eines Tablets **hält im Durchschnitt 300 Minuten**.
Der Akku-Leistungstest von 100 Tablets ist nachfolgend tabellarisch dargestellt:

Anzahl	**7**	**14**	**0,1k**	**k**	**25**	**10**
Akku-Laufzeit	**240**	**250**	**270**	**???**	**320**	**330**
Wahrschein-lichkeit	$\frac{7}{100}$	$\frac{14}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{10}{100}$

a) Ermitteln Sie den Wert für k, die fehlende Akku-Laufzeit in der Tabelle und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Lösung:

Berechnung k: **1,1k + 56 = 100 => 1,1k = 44 => k = 40**

Akku-Laufzeit:

$$E(X) = 240 \cdot 0,07 + 250 \cdot 0,14 + 270 \cdot 0,04 + t \cdot 0,4 + 320 \cdot 0,25 + 330 \cdot 0,10 = 300$$

$$\rightarrow \quad 175,6 + t \cdot 0,4 = 300 \quad \rightarrow \quad t \cdot 0,4 = 124,4 \quad \rightarrow \quad t = 311[Minuten]$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man mindestens 5 Stunden mit dem Tablet arbeiten, ohne es zwischendurch am Stromnetz anschließen zu müssen.

Lösung:

$$P(X \geq 300) \quad = \quad P(X = 311) + P(X = 320) + P(X = 330)$$

$$P(X \geq 300) \quad = \quad 0,4 + 0,25 + 0,1 \quad = \quad 0,75$$

c) Welche Mindest-Akku-Laufzeit könnte mit 93% Wahrscheinlichkeit garantiert werden?

Lösung: $P(X \geq t) \quad \geq \quad 0,93 \quad \rightarrow \quad t \geq 250[Minuten]$

Die Akku-Module wurden in verschiedenen Ländern hergestellt.

China: 40 % - Indien: 25 % - Thailand: 30 % - Myanmar: Rest

Allerdings ist die Verarbeitung bei den Hersteller-Ländern von unterschiedlicher Qualität, so dass nicht alle Produkte verkauft werden können.

Die Quote der Fehlerhaftigkeit in den einzelnen Ländern ist wie folgt:

China: 8 % - Indien: 10 % - Thailand: 9 % - Myanmar: 12 %

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt einwandfrei?

Lösung:

$$P("einwandfrei") \quad = \quad 0,4 \cdot 0,92 + 0,25 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,91 + 0,05 \cdot 0,88 \quad = \quad 0,91$$

e) Bei der Qualitätskontrolle wird ein fehlerhafter Akku gefunden.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er aus **Indien oder Myanmar**?

Lösung:

$$P("fehlerhaft") \quad = \quad 1 - 0,91 \quad = \quad 0,09$$

$$P_{"fehlerhaft"}(Indien \cup Myanmar) \quad = \quad \frac{P["fehlerhaft" \cap (Indien \cup Myanmar)]}{P("fehlerhaft")}$$

$$P_{"fehlerhaft"}(Indien \cup Myanmar) \quad = \quad \frac{P[("fehlerhaft" \cap Indien) \cup ("fehlerhaft" \cap Myanmar)]}{P("fehlerhaft")}$$

$$P_{"fehlerhaft"}(Indien \cup Myanmar) \quad = \quad \frac{0,25 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,12}{0,09} \quad = \quad \frac{0,031}{0,09} \quad = \quad 0,3444$$

f) Wie hoch darf die Fehlerquote der Produktion in Thailand höchstens sein, damit die Produkte in ihrer Gesamtheit zu 93 % fehlerfrei sind?

Lösung:

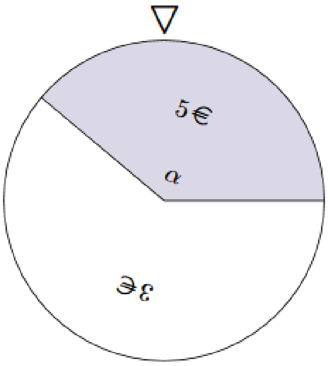
$$P(\text{"}einwandfrei\text{"}) \quad = \quad 0,4 \cdot 0,92 + 0,25 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot x + 0,05 \cdot 0,88 \quad = \quad 0,93$$

$$\rightarrow \quad 0,637 + 0,3 \cdot x \quad = \quad 0,93 \quad \rightarrow \quad 0,3 \cdot x \quad = \quad 0,293 \quad \rightarrow \quad x \quad = \quad 0,9766$$

$$\text{Fehlerquote: } 1 - 0,9766 \quad = \quad 0,0234$$

Zusatzfragen:
Wo liegt Myanmar,
wie lautet die Hauptstadt
und
welches war der
ehemalige Staatenname?

Zusatzaufgabe: **Erwartungswert**



Lösung:

$$Ansatz: \quad E(X) \quad = \quad 4,5 \quad \rightarrow \quad 4,5 \quad = \quad \frac{5 \cdot \alpha + 3 \cdot (360 - \alpha)}{360}$$

$$\rightarrow \quad 1.620 \quad = \quad 2 \cdot \alpha + 1080 \quad \rightarrow \quad 540 \quad = \quad 2 \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha \quad = \quad 270$$