13. Jgst.	**3. Kursarbeit (ProbeAbitur)**	**Datum: 03.03.2023**
Kurs 13/2	**Fach: Mathematik (Leistungsfach)**	

Thema: Alle drei Themenschwerpunkte
Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Themenbereich 1: Analysis

Betrachtet wird die Funktion f mit

$$f(x) = 2\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} \quad und \quad x\in\Re$$

Der Graph G_f der Funktion f ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W_1(1/0)$.
Die Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f der Funktion – leider ist die Skalierung an den Achsen „verloren" gegangen.

1.1 Ermitteln Sie folgende weitere signifikante Werte, um dann die Skalierung anzufügen. **[6]**
⇨ S_y
⇨ Nullstelle(n)

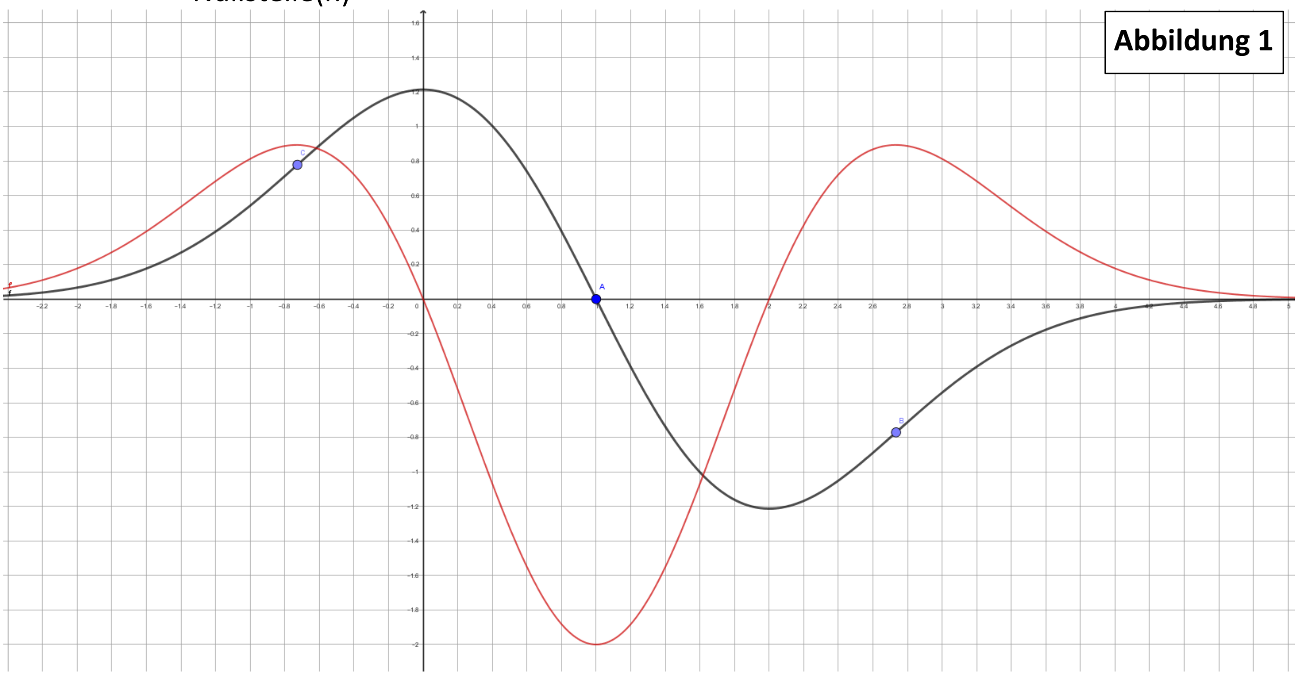


Abbildung 1

$$Nullstelle: \quad f(x) = 2\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} = 0$$

$$\rightarrow \quad 2\cdot(1-x) = 0 \quad \rightarrow \quad x=1$$

$$S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$$

1.2 Begründen Sie mit Hilfe des Funktionsterms, dass f genau eine Nullstelle hat. **[6]**

$$f(x) = 2\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} \xrightarrow{e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\neq 0} x=1$$

1.3 Beweisen Sie, dass das Grenzwertverhalten der Funktion für $x\to\pm\infty$ das anhand des Graphen zu erkennende Grenzwertverhalten aufweist. **[8]**

$$f(x) = 2\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} = \frac{2\cdot(1-x)}{e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}}$$

$$\xrightarrow{L'Hospital} \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot(1-x)}{e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}\cdot(x-1)} \to \frac{-2}{\infty} \to 0^-$$

$$\xrightarrow{L'Hospital} \lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot(1-x)}{e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}\cdot(x-1)} \to \frac{-2}{-\infty} \to 0^+$$

1.4 Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass die Funktion $F(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$ eine Stammfunktion der Funktion f ist. **[10]**

$$f(x) = 2\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} \quad und \quad x\in\Re$$

$$Substitution:$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 \to \frac{du}{dx}(x) = -(x-1) \to \frac{du}{dx}(x) = 1-x \to du = (1-x)dx$$

$$F = \int 2\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}dx \overset{Subst.}{=} \int 2\cdot e^u du \overset{Stammfkt.}{=} 2\cdot e^u \overset{\text{Re}-Subst.}{=} 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} + c$$

1.5 Bestimmen Sie b > 1 so, dass gilt: $\int_1^b f(x)dx = (-1)$ **[6]**

$$\int_1^b f(x)dx = (-1) \to \left[F(x)\right]_1^b = \left[2\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\right]_1^b = 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(b-1)^2} - 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-1)^2}$$

$$\to 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(b-1)^2} - 2 = (-1)$$

$$\xrightarrow[:2]{+2} e^{-\frac{1}{2}(b-1)^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\ln} -\frac{1}{2}(b-1)^2 = -\ln 2 \xrightarrow{\cdot(-2)} (b-1)^2 = \ln 4$$

$$\to b = 1+\sqrt{\ln 4} \approx 2{,}177$$

1.6 Neben $W_1(1 \mid 0)$ *und* $W_2\left(1+\sqrt{3} \mid f\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$ besitzt der Graph G_f genau einen weiteren Wendepunkt W_3. Skizzieren Sie die drei Wendepunkte in die Abbildung 1 und begründen Sie mithilfe der Abbildung 1, dass W_3 die x-Koordinate $1-\sqrt{3}$ besitzt. **[8]**
(Anmerkung: Den WP nicht berechnen, sondern argumentativ entwickeln)

Begründung mit Hilfe der Punktsymmetrie in P(1/0) => daher Spiegelung an der Stelle x = 1

Gegeben sei: $f'(x) = 2\cdot\left(x^2-2x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$ **[8]**

1.7 Ermitteln Sie die Steigungen in den drei Wendepunkten.

$$f'(1) = 2\cdot\left(1^2-2\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-1)^2} = -2\cdot e^0 = -2 = m_1$$

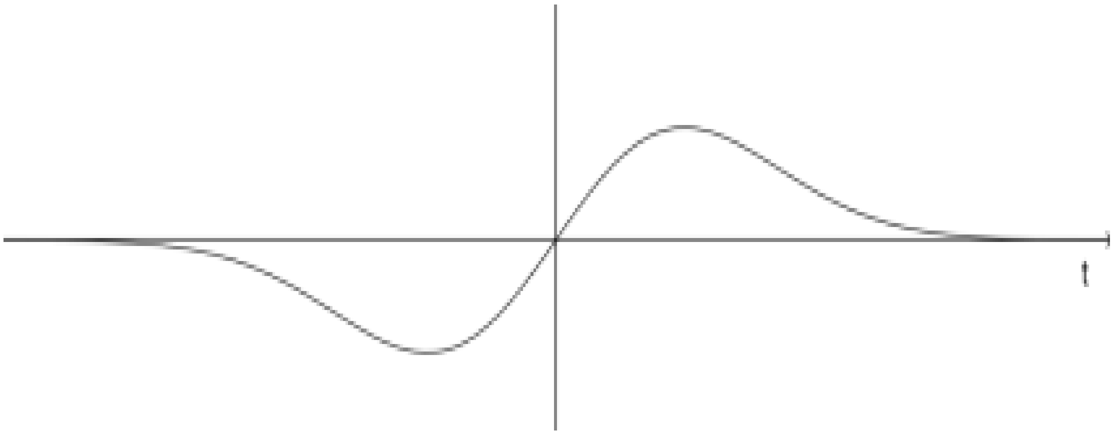
$$f'\left(1+\sqrt{3}\right) = 2\cdot\left(2,73^2-2\cdot 2,73\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}(2,73-1)^2} \approx 0,8925 = m$$

$$f'\left(1-\sqrt{3}\right) \overset{Punktsymmetrie}{=} f'\left(1+\sqrt{3}\right) \approx 0,8925 = m$$

1.8 Skizzieren Sie in der Abbildung 1 den Graphen der Ableitungsfunktion f'(x). **[6]**

⇨ ***Vgl. Graph bei 1.1***

Gegeben sei nun die Funktionenschar $h_{a;b}(t) = a\cdot t\cdot e^{b\cdot t^2}$ *mit* $a,b\in\Re\setminus\{0\}$ *und* $t\in\Re$
Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Funktionenschar $h_{a;b}(t)$.



1.9 Geben Sie das jeweilige **<u>Vorzeichen</u>** der Parameter a und b an. **[6]**

$$h_{a;b}(t) = a\cdot t\cdot e^{b\cdot t^2} \quad mit \quad a,b\in\Re\setminus\{0\} \quad und \quad t\in\Re$$
$$\rightarrow \quad a>0 \quad und \quad b<0$$

Nach der Einnahme eines Medikaments um 6:00 Uhr kann die Konzentration des Wirkstoffs im Blut durch eine Funktion $h_{a;b}(t)$ beschrieben werden.
Dabei ist t die Zeit in Stunden nach der Einnahme und $h_{a;b}(t)$ ist die Konzentration des Wirkstoffes im Blut in Milligramm pro Liter. Es gilt: $t \geq 0$
Die maximale Konzentration des Wirkstoffs von $4\,\frac{mg}{l}$ wird zwei Stunden nach der Einnahme erreicht.

1.10 Bestimmen Sie die entsprechenden Werte der Parameter a und b. **[8]**

$$h_{a;b}(t) = a \cdot t \cdot e^{b \cdot t^2} \quad mit \quad a,b \in \Re \setminus \{0\} \quad und \quad t \in \Re$$
$$h_{a;b}'(t) = a \cdot e^{b \cdot t^2} + a \cdot t \cdot e^{b \cdot t^2} \cdot 2 \cdot t \cdot b = e^{b \cdot t^2} \cdot \left(a + 2ab \cdot t^2\right)$$

$$i) \quad h_{a;b}(2) = a \cdot 2 \cdot e^{b \cdot 4} = 4 \quad \rightarrow \quad 2a \cdot e^{4b} = 4 \quad \xrightarrow{b=(-0,125)} \quad 2a \cdot e^{-0,5} = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2\sqrt{e} \approx 3,3$$
$$ii) \quad h_{a;b}'(2) = e^{4b} \cdot (a + 8ab) = 0 \quad \rightarrow \quad a(1+8b) = 0 \quad \rightarrow \quad b = -\frac{1}{8}$$

Unabhängig von den Ergebnissen zuvor, sollen nun für die Parameter a und b im Zeitraum zwischen 6:00 Uhr und 9:30 Uhr folgende Werte gelten:

$$h_{3;-0,15}(t) = 3 \cdot t \cdot e^{-0,15 \cdot t^2} \qquad mit \quad 0 \leq t \leq 3,5$$

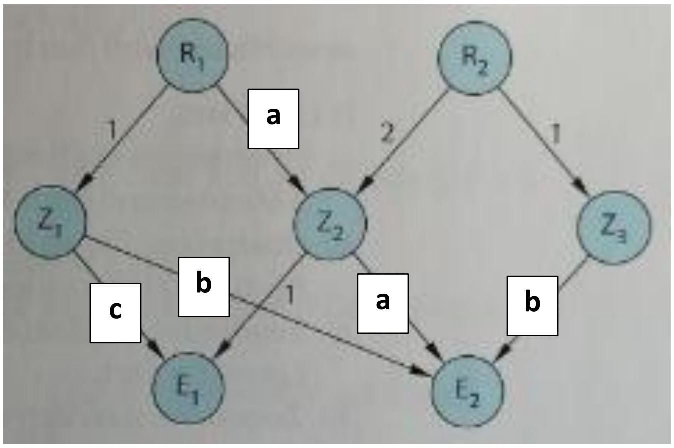
Es kann angenommen werden, dass danach der Wirkstoff linear mit derselben Änderungsrate wie zum Zeitpunkt 9:30 Uhr abgebaut.

1.11 Ermitteln Sie rechnerisch ein (Geraden)Gleichung w(t), die diesen linearen Abbau Beschreibt **und** berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut sein wird. **[8]**

$$h_{3;-0,15}(t) = 3 \cdot t \cdot e^{-0,15 \cdot t^2} \quad mit \quad 0 \leq t \leq 3,5$$
$$h'(t) = 3 \cdot e^{-0,15 \cdot t^2} + 3 \cdot t \cdot e^{-0,15 \cdot t^2} \cdot (-0,3 \cdot t) = e^{-0,15 \cdot t^2} \cdot \left(3 - 0,9 \cdot t^2\right) \quad = \quad m$$
$$h'(3,5) = e^{-0,15 \cdot 3,5^2} \cdot \left(3 - 0,9 \cdot 3,5^2\right) \quad = \quad m \quad \rightarrow \quad m = -1,28$$
$$h(3,5) = 3 \cdot 3,5 \cdot e^{-0,15 \cdot 3,5^2} \quad = \quad 1,68 \quad \rightarrow \quad R(3,5 \mid 1,68)$$
$$y - Achsenabschnitt: \quad 1,68 \quad = \quad -1,28 \cdot 3,5 + b \quad \rightarrow \quad b = 6,16$$
$$g(x) = -1,28t + 6,16$$
$$\xrightarrow[g(x)]{Nullstelle} \quad g(x) = -1,28t + 6,16 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 4,81 \quad \rightarrow \quad t = 4[h]48[\min]$$
$$Uhrzeit: \quad 6:00 + 4[h]48[\min] \quad = \quad 10:48 \quad [Wirkstoff\ abgebaut]$$

Themenbereich 2: Lineare Algebra I

Das Unternehmen Outchair GmbH stellt zwei Typen Kunststoffstühle E_1 und E_2 für den Außenbereich in zwei Produktionsschritten her.
Das Diagramm beschreibt einen mehrstufigen Produktionsprozess. Aus Rohstoffen werden Zwischenprodukte und aus diesen wiederum die Kunststoffstühle als Endprodukte hergestellt.
Die benötigten Mengeneinheiten sind im Diagramm angegeben – leider haben sich ein paar Lücken ergeben.



2.1 Bestimmen Sie die beiden Wertekombinationen der Koeffizienten a, b und c, wenn gilt: **[8]**

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} c & b \\ 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad M_{RE} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} c+a & b+a^2 \\ 2 & 2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = M_{RE}$$

$$\to \quad b+a^2 = 5 \quad und \quad 2a+b=5$$

$$\to \quad a^2-2a=0 \quad \to \quad (a-2)a=0 \quad \to \quad a_1=0 \quad und \quad a_2=2$$

$$\xrightarrow{a=0} \quad b=5 \quad und \quad c=5 \qquad oder \qquad \xrightarrow{a=2} \quad b=1 \quad und \quad c=3$$

Unabhängig vom Ergebnis verwenden Sie jetzt für a = 2, b = 3 und c = 1.

2.2 Zeigen Sie, dass die Matrix **(M_{RE})$^{-1}$** folgende Form annimmt: $(M_{RE})^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **[8]**

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+4 \\ 2 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = M_{RE}$$

$$Probe\ Inverse: \quad (M_{RE})^{-1} \cdot M_{RE} = E \quad \to \quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Bestimmen Sie zudem noch die **Determinante von M_{RE}**. **[5]**

Det $\mathbf{M_{RE}}$ = 7 Kehrwert zu $\left(M_{RE}\right)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ oder Det $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

2.4 Ermitteln Sie die benötigten Rohstoffmengen, wenn man von E_1 20 und von E_2 30 Mengeneinheiten liefern soll? **[9]**

$$M_{RE} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Im Lager befindet sich folgende Menge an Zwischenprodukten: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 90 \\ 65 \\ 75 \end{pmatrix}$.

2.5 Zeigen Sie, dass damit die **Gesamtsumme von 40 Kunststoffstühlen** erzeugt werden kann und danach das Lager vollkommen leer ist. **[8]**

$$M_{ZE} \cdot \vec{e} = \vec{z} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 65 \\ 75 \end{pmatrix} \xrightarrow{LGS} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Für die Produktion der beiden Stühle stehen 720 Maschinenstunden, 75 Montagestunden und 1 800 Mengeneinheiten (ME) des Werkstoffs Kunststoff zur Verfügung.
Die Angaben in der folgenden Tabelle beziehen sich jeweils auf die Produktion eines Stuhls.

	E_1	**E_2**
Maschinenstunden	**1,8**	**1,2**
Montagestunden	**0**	**0,3**
Kunststoff in ME	**3**	**6**

Die Stückkosten für E_1 und E_2 liegen bei: $\overrightarrow{stückkosten} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \end{pmatrix}$;

die Verkaufspreise sind mit $\overrightarrow{vkpreis} = \begin{pmatrix} 18 \\ 28 \end{pmatrix}$ kakuliert.

2.6 Ermitteln Sie grafisch den maximalen Gewinn. **[12]**

$$\overrightarrow{stückkosten} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{vkpreis} = \begin{pmatrix} 18 \\ 28 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{gewinn} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

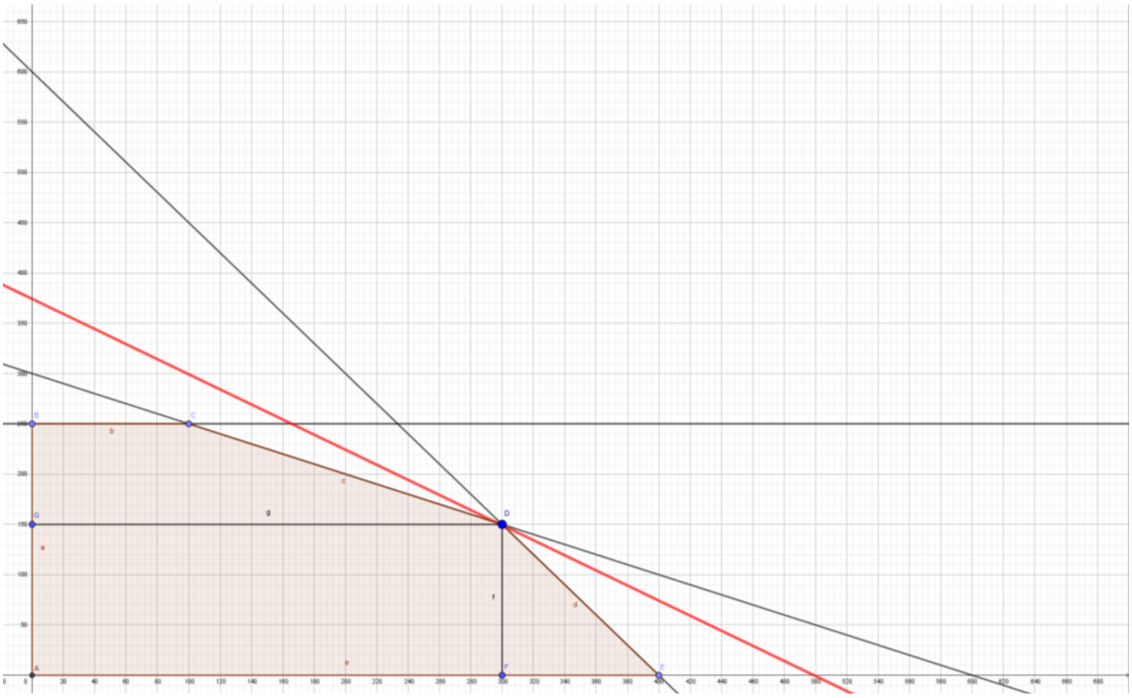
$Nebenbedingungen:$

$Maschinenstunden: \quad 1{,}8x + 1{,}2y \le 720$

$Montagestunden: \quad 0{,}3y \le 75$

$Kunststoff: \quad 3x + 3y \le 1.800$

$$Lösung: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \end{pmatrix} \quad mit\ g(300/150) = 3 \cdot 300 + 4 \cdot 150 = 1.500$$



Auf dem Kundenparkplatz der Outchair GmbH hat eine **Bäckerei-Verkaufsstelle** ihr Geschäft eröffnet. Das Angebot besteht u.a. aus drei Brötchensorten, die von drei Lieferanten **Aski, Bröt und Climek** bezogen werden.
Als Variablen sollen die Mengen an Brötchen von den jeweiligen Lieferantengesetzt werden:
Liefermenge von Lieferant Aski: **x** Liefermenge von Lieferant Bröt: **y**
Liefermenge von Lieferant Climek: **z**

- ⇨ I Pro Tag werden **höchstens 900 Brötchen** benötigt.
- ⇨ II Die **Transportkosten je Brötchen** betragen für die Abholung bei Lieferant **Aski 2 Cent**, bei **Bröt 3 Cent** und bei **Climek 4 Cent**.
  Die **Transportkosten sollen insgesamt höchstens 28 Euro** pro Tag betragen.
- ⇨ III Außerdem sollen von Lieferant **Bröt höchstens 300 Brötchen** pro Tag bezogen werden.

Beim Verkauf ergibt sich **je Brötchen ein Gewinn von 10 Cent**, falls es von **Aski** stammt, **12 Cent**, falls es von **Bröt** stammt, und **15 Cent**, falls es von **Climek** stammt.
Der Gewinn soll maximal sein.

2.7 Ermitteln Sie mithilfe des Simplex-Algorithmus die täglichen Bestellmengen bei den drei Lieferanten. Geben Sie den maximalen Gewinn an.

2.7.1 Nutzen Sie zur Lösung/Berechnung den Aufbau des gegebenen Tableaus. Führen Sie die notwendigen Umformungen durch, um auf **Tableau 1** zu gelangen. **[12]**

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I								
II								
III								
ZF								
I								
II								
III								
ZF								
I								
II								
III								
ZF								

2.7.2 Nach einigen Umformungsschritten mittels Simplexalgorithmus gelangen Sie (hoffentlich) auf folgendes **Tableau 1**:

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	0,5	0,25	0	1	-0,25	0	200	
II	0,5	0,75	1	0	0,25	0	700	
III	0	1	0	0	0	1	300	
ZF	2,5	0,75	0	0	-3,25	0	G-10.500	

2.7.2.1 Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss? **[2]**

In der ZF-Zeile gibt es noch positive Werte, daher ist das Maximum noch nicht erreicht!

2.7.2.2 Wie würde die aktuelle Lösung gemäß Tableau 1 lauten und welcher Gewinn würde erzielt? **[6]**

$$Lösung: \begin{pmatrix} z \\ u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \quad mit\ G = 10.500$$

2.7.2.3 Erstellen Sie nun ausgehend von **Tableau 1** das Endtableau, geben Sie die vollständige Lösung an und begründen Sie, warum nun ein Maximum vorliegen muss. **[10]**

Lösung gesamt:

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	1	1	1	1	0	0	900	
II	2	3	4	0	1	0	2.800	II*1/4
III	0	1	0	0	0	1	300	
ZF	10	12	15	0	0	0	G	
I	1	1	1	1	0	0	900	I - II
II	0,5	0,75	1	0	0,25	0	700	
III	0	1	0	0	0	1	300	
ZF	10	12	15	0	0	0	G	ZF – 15*II
I	0,5	0,25	0	1	-0,25	0	200	200 : 0,5
II	0,5	0,75	1	0	0,25	0	700	
III	0	1	0	0	0	1	300	
ZF	2,5	0,75	0	0	-3,25	0	G-10.500	
I	1	0,5	0	2	-0,5	0	400	
II	0,5	0,75	1	0	0,25	0	700	II – 0,5*I
III	0	1	0	0	0	1	300	
ZF	2,5	0,75	0	0	-3,25	0	G-10.500	ZF – 2,5*I
I	1	0,5	0	2	-0,5	0	400	
II	0	0,5	1	-1	0,5	0	500	
III	0	1	0	0	0	1	300	
ZF	0	-0,5	0	-5	-2	0	G-11.500	

$$Lösung: \begin{pmatrix} x \\ z \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix} \quad mit\ G = 11.500$$

In der ZF-Zeile gibt es keine positiven Werte mehr.

Themenbereich 3: Stochastik

An den Kundenschalter einer Elektronik-Fachmarktkette kommen Kunden, die Probleme mit ihrem Smartphone haben. Die Kundenberater am Schalter wissen aufgrund ihrer Erfahrung, dass diese Reklamationen auf folgenden, typischen Problemen mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten beruhen und unabhängig voneinander auftreten:

Problem	Screenfehler	Defekter Akku	Betriebssystemfehler	Sonstiger Fehler
Wahr'keit	4 %	5 %	8 %	x
Zusatzkosten	200,00	400,00	y	300,00

Von diesen vier Problemen tritt pro Reklamation genau eines auf.

Die Funktionsfähigkeit soll nun optimiert werden – insgesamt soll die Fehlerfreiheit für das Gesamtgerät bei ca. 80 % liegen und die Zusatzkosten sollten mit höchstens 60,00 € pro Smartphone kalkuliert werden können.

3.1 Prüfen Sie am Sachverhalt, ob die Fehlerfreiheit für x < 5 % hier realisierbar ist. **[6]**

0,96 * 0,95 * 0,92 * (1-x) = 0,8 => x = 0,0465 < 0,05

3.2 Welche Zusatzkosten müsste man bei Betriebssystemfehlern in Kauf nehmen, wenn der Wert für x = 4 % wäre? **[6]**

$$0{,}04\cdot 200+0{,}05\cdot 400+0{,}08x+0{,}04\cdot 300=60$$

$$8+20+0{,}08x+12=60 \quad\rightarrow\quad 0{,}08x=20 \quad\rightarrow\quad x=\frac{20}{0{,}08}=250$$

Die Kundenberater können nur dann vor Ort helfen, falls es sich um einen Bedienungsfehler handelt, der aus Erfahrung bei ca. 30 % vorliegt. Bei anderen Problemen muss das Smartphone zur Reparatur geschickt werden.

3.3 An einem Morgen waren schon vier Kunden mit Smartphone-Reklamationen am Kundenschalter. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

3.3.1 Die Kundenberater konnten allen vier Kunden vor Ort helfen. **[7]**

$$B_{4;0,3}(X=4) = \binom{4}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7^0 = 0{,}0081 = 0{,}81[\%]$$

3.3.2 Ein Bedienungsfehler lag bei genau einem Smartphone vor. **[7]**

$$B_{4;0,3}(X=1) = \binom{4}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^3 = 0{,}4116 = 41{,}16[\%]$$

3.3.3 Wie viele Kunden müssen mindestens einen Fehler reklamiert haben, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 99,9 % mind. ein Bedienungsfehler darunter war? **[8]**

$$B_{n;0,3}(X \geq 1) \geq 0{,}999 \rightarrow 1 - B_{n;0,3}(X = 0) \geq 0{,}999 \rightarrow B_{n;0,3}(X = 0) \leq 0{,}001$$

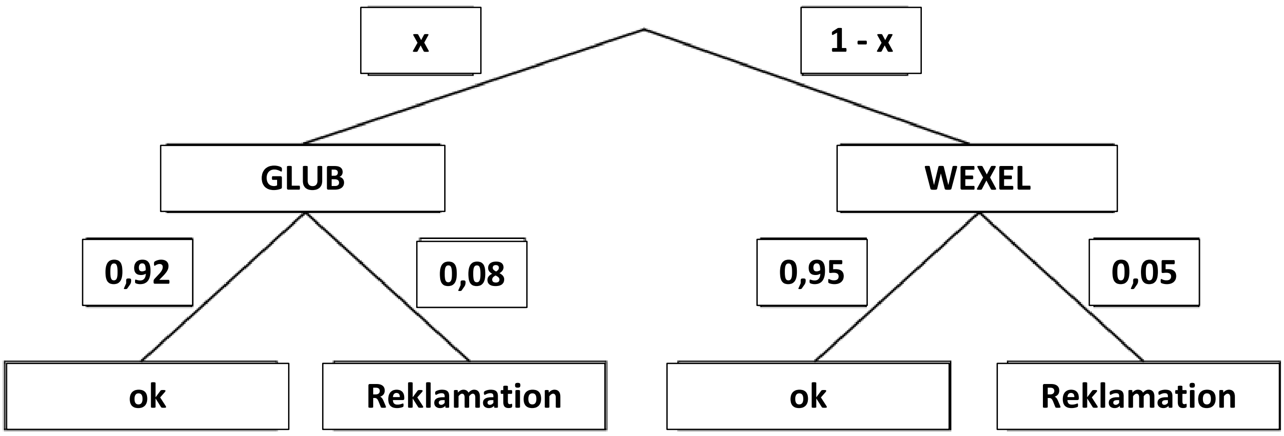
$$\binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^n \leq 0{,}001 \rightarrow 0{,}7^n \leq 0{,}001 \rightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}7} = 19{,}367$$

$$\rightarrow n \geq 20$$

An den Kundenschalter kommen auch Kunden, die Probleme mit ihrem Tablet haben.

Die Tablets wurden mit Prozessoren von zwei Herstellern ausgerüstet. Von den Prozessoren von Glub wurden 8 % reklamiert, von denen von Hersteller Wexel betrug die Reklamationsquote 5 %. Insgesamt wurden am Kundenschalter 6,8 % der Tablets wegen des Prozessors angemahnt.

3.4 Bestimmen Sie den Anteil der Tablets, die mit einem Prozessor von Glub ausgestattet waren. Dokumentieren Sie das Vorgehen **auch graphisch mittels Baumdiagramm**. **[10]**



$$x \cdot 0{,}08 + (1 - x) \cdot 0{,}05 = 0{,}068 \rightarrow 0{,}03x = 0{,}018 \rightarrow x = 0{,}6 = 60[\%]$$

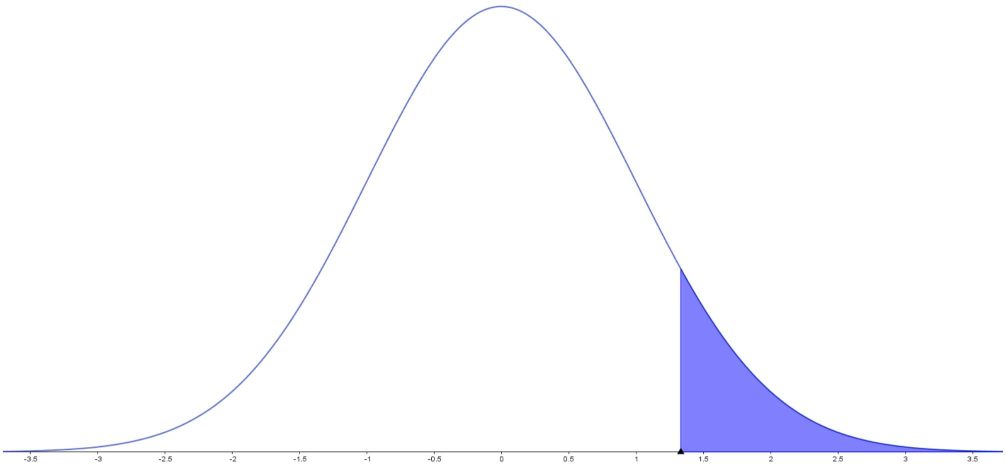
Die neue Tablet-Serie wird nun komplett mit Displays von SunFlex geliefert – da diese eine besondere Helligkeit versprechen.

Anmerkung: ***Wie hell sollte das Display sein?***
Den letzten entscheidenden Faktor des integrierten Displays bei einem Tablet, stellt die maximal mögliche Bildschirmhelligkeit dar. Diese ist angegeben in Candela pro Quadratmeter (cd/m²). Je heller ein Gerät sein kann, desto mehr Akku verbraucht es zwar, aber erst auf einem hellen Display sind Inhalte unter der Mittagssonne erkennbar. Daher sollte die Mindesthelligkeit 400 cd/m² betragen, ansonsten ist das Display, wie unsere Tests zeigten, im Sonnenschein nur schwer ablesbar.

SunFlex garantiert uns einen Helligkeitswert μ = 400 und einer Standardabweichung von σ = 15.

3.5 **Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit** für einen Helligkeitswert von mind. 420 und stellen Sie das Ergebnis **graphisch (Skizze)** dar. **[10]**

$$P(X \geq 420) = 1 - \Phi\left(\frac{420-400}{15}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$



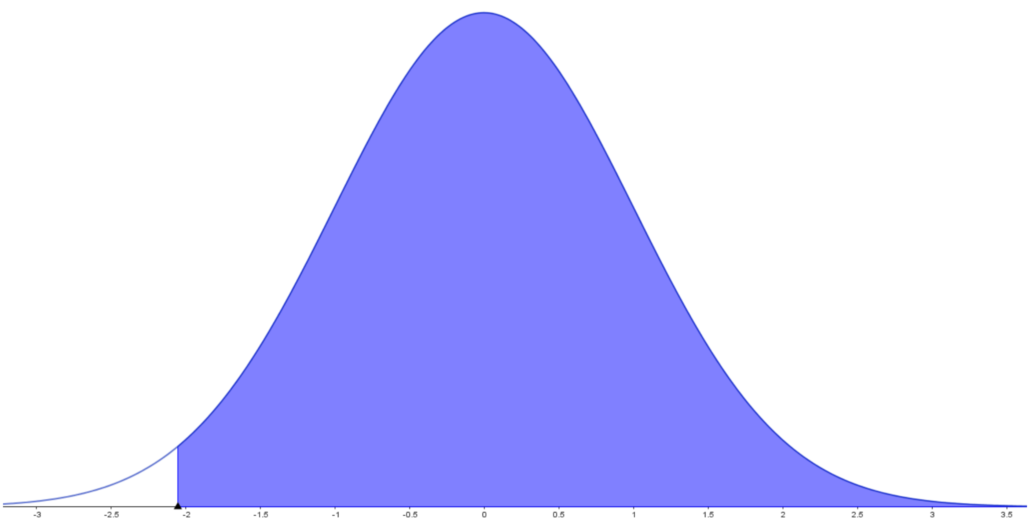
Knut Knödelbach möchte einen Helligkeitswert auf seinem Tablet von mind. 375 haben, da er sonst um die Leistungsfähigkeit seines Akkus besorgt ist.
SunFlex garantiert dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 %.

3.6 Prüfen Sie, ob der Kundenwunsch mit der Zusage des Herstellers zu vereinbaren ist. Dokumentieren Sie dies ebenso **mittels Skizze**. **[10]**

$$P(X \geq k) = 0{,}98 \rightarrow P(X < k) = 0{,}02 \rightarrow \Phi(z) = 0{,}02$$

$$\rightarrow z = -2{,}05 \rightarrow \frac{k-400}{15} = -2{,}05 \rightarrow k = 369{,}25 < 375$$

Da der Wert unterhalb von 375 liegt, ist die 98 %-Quote / -Zusage erfüllt.



SunFlex stellt uns aufgrund von Weiterentwicklungen sein neues Display vor und garantiert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % einen Helligkeitswert von mind. 420 mit $\sigma = 8$.

3.7 Welcher Erwartungswert liegt der Helligkeit hier zugrunde? **[8]**

$$P(X \geq k) = 0{,}95 \rightarrow P(X < k) = 0{,}05 \rightarrow \Phi(z) = 0{,}05$$

$$\rightarrow z = -1{,}65 \rightarrow \frac{420-\mu}{8} = -1{,}65 \rightarrow \mu = 433{,}2$$

Eine Stichprobe hat ergeben, dass 915 von 1.000 Displaytests einen Mindesthelligkeitswert von 420 Einheiten besaßen.

3.8 Geben Sie einen Schätzwert für p an und prüfen Sie, ob der o.a. Wahrscheinlichkeitswert von 95 % seitens SunFlex zum Konfidenzniveau von 99 % bestätigt werden kann. **[8]**

Konfidenzintervall (Abschätzung): $\rightarrow p = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S \cdot (1-p_S)}{n}}$

$$\rightarrow p = 0{,}915 \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}915 \cdot 0{,}085}{1.000}} \rightarrow p \in [0{,}8922; 0{,}9378]$$

Der Wert von 95 % liegt nicht im Konfidenzintervall und somit kann mit einer Sicherheit von 99 % festgestellt werden, dass die Zusicherung von 95 % seitens Sunflex nicht akzeptiert werden kann.

Anlage I: Tabelle zur Normalverteilung

Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$. Beispiel: $\Phi(1.23) = 0.8907$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Anlage II: Sigma-Regeln

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße/-variable X mit den Parametern n und p,
dem Erwartungswert $\mu(X) = n \cdot p$
und der Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ **mit der Bedingung** $\sigma(X) > 3$
erhält man folgende Näherungen:

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P(|X-\mu| \le \sigma) = 0{,}683$$
$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(|X-\mu| \le 2\sigma) = 0{,}954$$
$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = P(|X-\mu| \le 3\sigma) = 0{,}997$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) = P(|X-\mu| \le 1{,}64\sigma) = 0{,}90$$
$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) = P(|X-\mu| \le 1{,}96\sigma) = 0{,}95$$
$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) = P(|X-\mu| \le 2{,}58\sigma) = 0{,}99$$

Bezogen auf die Standardnormalverteilung:
- $\rightarrow$ Sigma-Intervall für 95%-Umgebung: $\pm 1{,}96\sigma \; [Tabelle: 0{,}975]$
- $\rightarrow$ Sigma-Intervall für 90%-Umgebung: $\pm 1{,}64\sigma \; [Tabelle: 0{,}95]$
- $\rightarrow$ Sigma-Intervall für 99%-Umgebung: $\pm 2{,}58\sigma \; [Tabelle: 0{,}995]$

Anlage III: Ergänzungen zur Formelsammlung

Konfidenzintervall: $X = n \cdot p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \rightarrow (n \cdot p - X)^2 = z_{\frac{\alpha}{2}}{}^2 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$

Konfidenzintervall (Abschätzung): $\rightarrow \; p = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S \cdot (1-p_S)}{n}}$

Mindestumfang einer Stichprobe: $n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}{}^2}{d^2} \cdot p_S \cdot (1-p_S) \xrightarrow[p\ unbekannt]{p(\max) = \frac{1}{2}} n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}{}^2}{4d^2}$

$mit\ d = |h-p|$ bzw. zugelassener Abweichung

Themenbereich 4: Lineare Algebra II

Drei Energieversorger A, B und C konkurrieren in einer Gemeinde um 4.000 Haushalte. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Verbraucher, den Energieversorger zu wechseln.
Von A wechseln 10 % zu B und 40 % zu C; **von** B wechseln 20 % zu A und 10 % zu C und **von** C wechseln 10 % zu A und 50 % zu B. Die übrigen bleiben bei ihrem Versorger.
Im Jahr 2021 sind 3.200 Haushalte bei A und bei B haben 15 % ihre Verträge, die übrigen sind bei C.

4.1 Geben Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor 2021 in absoluten und dezimalen Anteilswerten an. **[6]**

$$U=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{p_{2021}}=\begin{pmatrix}0{,}8\\ 0{,}15\\ 0{,}05\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{p_{2021}}=\begin{pmatrix}3.200\\ 600\\ 200\end{pmatrix}$$

4.2 Berechnen Sie, wie viele Haushalte von den einzelnen Energieversorgern im Jahr 2022 beliefert werden. **[6]**

$$U\cdot\overrightarrow{p_{2021}}=\overrightarrow{p_{2022}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}8\\ 0{,}15\\ 0{,}05\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}435\\ 0{,}210\\ 0{,}355\end{pmatrix} \quad oder \quad \begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3.200\\ 600\\ 200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.740\\ 840\\ 1.420\end{pmatrix}$$

4.3 Begründen Sie, dass auf der Basis dieser Daten leider nicht die Verteilung von 2020 berechnet werden kann. **[6]**

$$U\cdot\overrightarrow{p_{2020}}=\overrightarrow{p_{2021}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\\ 0{,}15\\ 0{,}05\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}45\\ 1{,}167\\ -1{,}625\end{pmatrix}$$

Die Ergebnisse sind größer als 1 und negativ.

Der Energieversorger B überlegt sich, den Standort auszubauen – das würde sich aber nur lohnen, wenn bei gleichbleibendem Wechselverhalten langfristig mehr als 45 % der Haushalte unter Vertrag hätte.

4.4 Prüfen Sie die langfristige Entwicklung und geben Sie eine Entscheidungshilfe **[8]**

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \rightarrow \quad (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad mit \quad 1 - Zeile$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,3 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,50 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Langfristig würden 50 % der HH bei Versorger B den Vertrag abschließen, daher würde sich der Ausbau lohnen.

In der Nachbargemeinde sind ebenfalls die Anbieter A und B sowie ein weiterer Anbieter D am Markt. Das Wechselverhalten der Haushalte wird mit folgender Tabelle beschrieben:

von / nach	A	B	D
A	**0,3**	**0,2**	**u**
B	**0,5**	**0,6**	**v**
D	**0,2**	**0,2**	**w**

Angenommen, u hat den Wert 0,1.

4.5 Welche Werte für v und w sind dann möglich? **[6]**

$$u + v + w = 1 \quad und \quad u, v, w \geq 0 \quad \xrightarrow{u=0,1} \quad v = 0,9 - w[\geq 0]$$

4.6 Bestimmen Sie u, v und w, sodass sich die Anteile der Haushalte bei den Anbietern A, B und D von einem Jahr zum anderen nicht ändern, wobei sich die Anteile von A, B und D wie 1 : 3 : 1 verhalten. **[8]**

$$U_{(u,v,w)} \cdot (0,2 \quad 0,6 \quad 0,2)^T = (0,2 \quad 0,6 \quad 0,2)^T$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & u \\ 0,5 & 0,6 & v \\ 0,2 & 0,2 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0,18 + 0,2u \\ 0,46 + 0,2v \\ 0,16 + 0,2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0,2u \\ 0,2v \\ 0,2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,14 \\ 0,04 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0,02}{0,2} \\ \frac{0,14}{0,2} \\ \frac{0,04}{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,7 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Die drei Energieversorger haben sich zum Unternehmen Energy-Mix GmbH zusammengeschlossen und sind nach dem sogenannten Leontief-Modell miteinander verflochten.
Die zugrundeliegende Technologiematrix hat folgendes Aussehen:

$$T(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}01 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}09 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}01\cdot t \end{pmatrix} \quad mit\ t\in[0;100]$$

Die Lieferungen untereinander, der Konsum sowie die Produktion werden in Geldeinheiten (GE) angegeben.

4.7 Für das erste Quartal des Jahres liegt folgende unvollständige Verflechtungstabelle vor: **[10]**

	Sektor A	Sektor B	Sektor C	Markt	Produktion
Sektor A	0	55	260	a	5 000
Sektor B	100	275	1 170	3 955	b
Sektor C	c	d	780	9 020	13 000

Bestimmen Sie a, b, c und d sowie den Wert des Parameters t für diese Situation.

	Sektor A	Sektor B	Sektor C	Markt	Produktion
Sektor A	0	55	260	**a = 5.000-55-260** **a = 4.685**	5 000
Sektor B	100	275	1 170	3 955	**b = 100+275+1.170+3.955** **b = 5.500**
Sektor C	**c/5.000 = 0,2** **c = 1.000**	**d/5.500 = 0,4** **d = 2.200**	**780/13000=0,01t** **=> t = 6**	9 020	13 000

4.8 Für das zweite Quartal gilt **t = 5**. Der Wert der Konsumabgabe beträgt für Sektor A 1.777 GE, für Sektor B 1.245 GE und für Sektor C 8.180 GE. **[8]**
Wie hoch muss der Wert der Produktion jedes Sektors sein, um dieser Nachfrage gerecht zu werden?
Wie hoch ist dabei der Wert des Eigenverbrauchs von Sektor C?

$$T\cdot\vec{x}+\vec{y}=\vec{x} \quad\rightarrow\quad \vec{y}=\vec{x}-T\cdot\vec{x} \quad\rightarrow\quad \vec{y}=(E-T)\cdot\vec{x} \quad\rightarrow\quad (E-T)^{-1}\cdot\vec{y}=\vec{x}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 & -0{,}01 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & 0{,}95 & -0{,}09 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1.777 \\ 1.245 \\ 8.180 \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \vec{x}=\begin{pmatrix} 2.000 \\ 2.300 \\ 10.000 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\quad Eigenverbrauch\ Sektor\ C:\ \frac{x_{3,3}}{10.000}=0{,}05 \quad\rightarrow\quad x_{3,3}=500$$

4.9 Untersuchen Sie, für welchen Wert von t keine Inverse zur Technologiematrix existiert. **[6]**

$$\det\left[T(t)\right]=\det\begin{pmatrix} 0 & 0{,}01 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}09 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}01\cdot t \end{pmatrix} = 2\cdot 10^{-6}\cdot(70-t) = 0 \rightarrow t=70$$

4.10 Aufgrund der Ergebnisse in Auftrag gegebener Marktprognosen entwickelt sich der Marktbedarf der Produkte von A, B und C in den **kommenden Monaten** unterschiedlich, so dass auf der Basis folgender Gesamtproduktion kalkuliert wird.

$$\overrightarrow{x_k} = \begin{pmatrix} -k+40 \\ 100-20\cdot e^{-2k} \\ 100 \end{pmatrix} \quad mit \quad k=[0;12]$$

Dabei soll k für einen Zeitpunkt innerhalb des Betrachtungszeitraums stehen.

4.10.1 Beschreiben Sie die Entwicklung der Gesamtproduktion für A, B und C in den kommenden 12 Monaten. **[6]**

Komponente A: **ausgehend von 40 lineare Abnahme um m = -1**

Komponente B: **ausgehend von 80 steigt der Wert,**
da such der Subtrahend vermindert

Komponente C: **konstanter Verbleib der Werte bei 100**

4.10.2 Zeigen Sie, dass die möglichen Abgaben an den Markt mit **T(0)** folgende Darstellung annehmen kann: **[10]**

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,2e^{-2k} - k + 37 \\ -19e^{-2k} + 85,2 + 0,02k \\ 8e^{-2k} + 52 + 0,2k \end{pmatrix}$$

und ermitteln Sie den Zeitpunkt, in dem das **Maximum der Summe der Marktabgaben** erreicht wird.
Beachten Sie bitte, dass k als Intervall gegeben ist.

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & -0,01 & -0,02 \\ -0,02 & 0,95 & -0,09 \\ -0,2 & -0,4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k + 40 \\ 100 - 20 \cdot e^{-2k} \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2e^{-2k} - k + 37 \\ -19e^{-2k} + 85,2 + 0,02k \\ 8e^{-2k} + 52 + 0,2k \end{pmatrix}$$

Summe:

$$y(k) = 0,2e^{-2k} - k + 37 + \left(-19e^{-2k} + 85,2 + 0,02k\right) + 8e^{-2k} + 52 + 0,2k$$

$$y(k) = -10,8e^{-2k} - 0,78k + 174,2$$

$$y'(k) = 21,6e^{-2k} - 0,78 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 1,66$$

$$y''(k) = -43,2e^{-2k} \quad \rightarrow \quad y''(1,66) = -43,2e^{-2 \cdot 1,66} < 0 \quad \rightarrow \quad Max$$

$$y(1,66) = 172,51$$

$$Randwerte: \quad y(0) = 163,4 \quad und \quad y(12) = 164,84$$