13. Jgst.	5. Test	Datum: 03.02.2023
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: e-Funktionen (Differential- & Integralrechnung)
Mit und ohne Scharparmeter

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Steigung**

6	

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$f(x) = \frac{3x}{e^{2x}}$ an der Stelle x = 1.

Lösung:

$$f(x) = \frac{3x}{e^{2x}} \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = \frac{3 \cdot e^{2x} - 6x \cdot e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{3-6x}{e^{2x}}$$

$$f(1) = \frac{3}{e^2} \quad und \quad f'(1) = \frac{-3}{e^2} = m$$

$$y - Achsenabschnitt: \frac{3}{e^2} = \frac{-3}{e^2} \cdot 1 + b \rightarrow b = \frac{6}{e^2} \rightarrow t(x) = -\frac{3}{e^2} \cdot x + \frac{6}{e^2}$$

Aufgabe 2: **Kurvenuntersuchung (innermathematisch)**

17	

Untersuchen Sie die Funktion $f_k(x) = \left(k - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^x \quad mit\ k > 0$

a) Berechnen Sie Schnittstellen mit den Koordinatenachsen.

Lösung:

$$Nullstellen: \left(k - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^x = 0 \xrightarrow{e^x \neq 0} \left(k - \frac{1}{2}x\right) = 0 \rightarrow x = 2k$$

$$S_y(0 \mid k)$$

b) Zeigen Sie, dass die 2. Ableitung folgende Form annehmen kann:

$$f_k''(x) = e^x \cdot \left(-1 + k - \frac{1}{2}x\right)$$

Lösung:

$$f_k'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^x + \left(k-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^x = \left(-\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^x$$

$$f_k''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^x + \left(-\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^x = \left(-1+k-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^x$$

c) Wie lauten die Extrema der Scharkurve?

Lösung:

$$f_k'(x) = \left(-\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2k-1$$

$$f_k''(2k-1) = \left[-1+k-\frac{1}{2}(2k-1)\right]\cdot e^{(2k-1)} = (-0,5)\cdot e^{(2k-1)} < 0$$

$$\rightarrow \quad MAX\left(2k-1 \;\middle|\; \frac{1}{2}e^{(2k-1)}\right)$$

$$NR: \quad f_k(2k-1) = \left[k-\frac{1}{2}(2k-1)\right]\cdot e^{(2k-1)} = \frac{1}{2}e^{(2k-1)}$$

Aufgabe 3: **Anwendungsaufgabe**

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = 100t^2 \cdot e^{-0,5\cdot t} \quad mit\ t \geq 0$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und f(t) die Anzahl der **Neuerkrankungen pro Woche**.

a) In welcher Woche erkranken die meisten Personen neu? Wie viele sind dies? Belegen Sie hinreichend.

Lösung:

$$f'(t) = 200t\cdot e^{-0,5\cdot t} - 50t^2\cdot e^{-0,5\cdot t} = \left(200t-50t^2\right)\cdot e^{-0,5\cdot t} = 0$$

$$\xrightarrow{e^{-0,5\cdot t}\neq 0} \quad (200-50t)\cdot t = 0 \quad \rightarrow \quad t=0 \quad und \quad t=4$$

$$f''(t) = (200-100t)\cdot e^{-0,5\cdot t} + \left(25t^2-100t\right)\cdot e^{-0,5\cdot t} = \left(25t^2-200t+200\right)\cdot e^{-0,5\cdot t}$$

$$f''(0) = 200 > 0 \quad \rightarrow \quad MIN(0 \mid 0)$$

$$f''(4) = (-200)\cdot e^{-2} < 0 \quad \rightarrow \quad MAX\left(4 \;\middle|\; \frac{1600}{e^2}\right)$$

b) Erläutern Sie mit mathematischen Mitteln, dass die Erkrankungsrate nach der 4. Woche rückläufig ist. (=> Monotonie/L'Hospital?!)

Lösung:

$$f(t) = 100t^2 \cdot e^{-0,5\cdot t} = \frac{100t^2}{e^{0,5\cdot t}}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \overset{L'Hospital}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{100t^2}{e^{0,5\cdot t}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{200t}{0,5\cdot e^{0,5\cdot t}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{200}{0,25\cdot e^{0,5\cdot t}} \rightarrow 0$$

c) Nehmen wir an, dass die Stammfunktion folgende Form annehmen kann:

$$F(t) = \frac{-200\left(t^2+4t+8\right)}{e^{0,5t}}$$

Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Stammfunktion zu $f(t)$ ist.

Lösung:

$$F(t) = \frac{-200\left(t^2+4t+8\right)}{e^{0,5t}} \xrightarrow{Ableitung}$$

$$\rightarrow F'(t) = \frac{-200(2t+4)e^{0,5t} + 100\left(t^2+4t+8\right)e^{0,5t}}{e^t}$$

$$\rightarrow F'(t) = \frac{\left[-400t-800+100t^2+400t+800\right]e^{0,5t}}{e^t} = \frac{100t^2}{e^{0,5t}} = f(t)$$

Oder per Integralrechnung

$$f(t) = 100t^2 \cdot e^{-0,5\cdot t} \quad mit\ t \geq 0$$

VZ	D	I
$+$	$100t^2$	$e^{-0,5\cdot t}$
$-$	$200t$	$(-2)\cdot e^{-0,5\cdot t}$
$+$	200	$4\cdot e^{-0,5\cdot t}$
$-$	0	$(-8)\cdot e^{-0,5\cdot t}$

$$\int f(t)dt = 100t^2 \cdot (-2)\cdot e^{-0,5\cdot t} - 200t\cdot 4\cdot e^{-0,5\cdot t} + 200\cdot(-8)\cdot e^{-0,5\cdot t}$$

$$\int f(t)dt = \left[-200t^2-800t-1600\right]\cdot e^{-0,5\cdot t} = \frac{-200\cdot\left(t^2+4t+8\right)}{e^{-0,5\cdot t}} = F(t)$$

d) Wie viele Personen erkranken in den ersten 10 Wochen insgesamt?

Lösung:

$$F(t) = \left[\frac{-200\left(t^2+4t+8\right)}{e^{0,5t}}\right]_0^{10} = \frac{-200\cdot 148}{e^5} - \frac{-1600}{e^0} \approx 1.400\left[Personen\right]$$

e) Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche während der ersten 10 Wochen bei ca. 140 Personen liegt.

Lösung:

Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$m(t) = \frac{1}{10-0}\left[\frac{-200\left(t^2+4t+8\right)}{e^{0,5t}}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\cdot 1.400 = 140\left[Personen\right]$$

f) Begründen Sie, dass die Gesamtsumme der Neuerkrankungen über den kompletten Betrachtungszeitraum den Wert 1600 nicht übertreffen wird.

Lösung:

$$\lim_{k\to\infty}\left[F(t)\right]_0^k = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{-200\left(t^2+4t+8\right)}{e^{0,5t}}\right]_0^k = \lim_{k\to\infty}\frac{-200\left(k^2+4k+8\right)}{e^{0,5\cdot k}} - \frac{-1600}{e^0}$$

$$\xrightarrow{L'Hospital} \lim_{k\to\infty}\frac{-200\left(k^2+4k+8\right)}{e^{0,5\cdot k}} + 1600 \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{-200\left(2k+4\right)}{0,5\cdot e^{0,5\cdot k}} + 1600$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{-200\cdot 2}{0,25\cdot e^{0,5\cdot k}} + 1600 \to 0 + 1600 \to 1600$$