

Aufgabe 3: Stochastik (mit Mährobotern)



Das Unternehmen MÄH-ROB GmbH produziert seit einigen Jahren verschiedene Typen von Mährobotern. Die Montage erfolgt in sechs aufeinanderfolgenden Arbeitsschritten.

Leider treten **unabhängig voneinander** immer wieder Fehler auf, die gemäß der Übersicht dokumentiert wurden und zu den jeweiligen Zusatzkosten führen:

	Schritt 1: Antriebsräder an Gehäuse montieren	Schritt 2: Einsetzen Messermotor & prüfen	Schritt 3: Gleitplatte & Messerteller einbauen	Schritt 4: Ladekontakte einrichten	Schritt 5: Lenkmotor einbauen & kalibrieren	Schritt 6: Steuerplatine & Fahrmotor einrichten
Fehlerwahrscheinlichkeit	0,025	0,012	a	0,02	0,015	0,01
Zusatzkosten in €	100,00	b	40,00	120,00	200,00	150,00

3.1 Die Fehlerwahrscheinlichkeit im Arbeitsschritt 3 kann aufgrund mangelhafter Aufzeichnungen nur mit dem Parameter a angegeben werden. Für das kommende Frühjahr soll die Produktion derart optimiert werden, dass **mindestens 90 %** der montierten Mähroboter **komplett fehlerfrei** in den Verkauf gehen; zudem sollen die **fakultativen Zusatzkosten insgesamt maximal 11,20 € pro Gerät** betragen.

3.1.1 Zeigen Sie, dass dieses Anforderungsprofil in der gegebenen Situation und mittels Anpassung der offenen Fehlerwahrscheinlichkeit a im den Arbeitsschritt 3 realisierbar ist und bestimmen Sie die Obergrenze von a.

[4]

3.1.2 Berechnen Sie die Höhe der anzusetzenden Zusatzkosten (Parameter b) bei einem Fehler in Arbeitsschritt 2, wenn der **Wert a = 0,03** wäre.

[4]

3.2 Geschäftsführer Hugo Prüfling möchte speziell den Arbeitsschritt 6 im Rahmen von Stichproben auf Fehlerfreiheit untersucht wissen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der bei den Mährobotern fehlerhaft eingerichteten Steuerplatinen & Fahrmotoren an.

3.2.1 Begründen Sie aus diesem Testverfahren heraus, dass X als binomialverteilt gelten kann.

[3]

3.2.2 Wie viele Mähroboter (konkret: Steuerplatinen) wurden in der Stichprobe untersucht, wenn man eine Standardabweichung von $\sigma = 0,9$ zugelassen hat?

[4]

Aufgabe 3: Stochastik (mit Mährobotern)

Der Bau- und Gartenmarkt Bach-Horn bietet in seinem Verkaufsareal Mähroboter ausschließlich von der MÄH-ROB GmbH an.

Zur Verkaufsförderung werden die Gehäuse mit verschiedenen Designs von Fußballvereinen – speziell für Fans, aber natürlich nicht nur für diese - angeboten und zwar fünfmal das Modell „Kaiserslautern“, je dreimal „Liverpool“ und „Madrid“, von den übrigen Modellen je 1 Exemplar.

Gleiche Designs sind nicht unterscheidbar.

Kaiserslautern	Mönchengladbach	Hamburg	Madrid	Liverpool	Manchester

Quelle: <https://trendaffe.de/geschenke/>

- 3.3 Die 14 Mähroboter sollen nebeneinander ausgestellt werden. Ermitteln Sie die Anzahl unterscheidbarer Anordnungen. [4]
- 3.4 Selbstverständlich hat der Bau- und Gartenmarkt Bach-Horn mehr als diese 14 Exemplare auf Lager; allerdings erfreuen die verschiedenen Vereinsaufschriften unterschiedlicher Beliebtheit:
Der Renner ist der Mähroboter mit „Kaiserslautern Fan“-Aufschrift (30 %), dicht gefolgt vom „Madrid-Fan“ (25 %); am wenigsten beliebt ist das Hamburg-Logo (2 %). Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden von den nächsten 50 Kunden
- 3.4.1 genau 14 das Design „Kaiserslautern-Fan“-Design, [5]
- 3.4.2 zwischen 8 und 12 das „Madrid-Fan“-Design wählen? [5]
- 3.4.3 Wie viele Mähroboter im Fan-Look müssen verkauft werden, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einmal das „Hamburg-Fan“-Design verlangt wird? [7]
- 3.5 Das Modell MÄH-ROBBY-23 wird mit einer eingebauten 5-Megapixel-Kamera – damit man mittels App das Mähen des Rasens per Bild verfolgen kann - geliefert, die von den Herstellern **NewCam (NC)** und **RobbCam (RC)** produziert werden. Von den Kameras des Herstellers **NewCam (NC)** wurden in den ersten drei Monaten 2 % reklamiert, bei den Kameras von **RobbCam (RC)** betrug die Reklamationsquote 2,5 %.
- 3.5.1 Insgesamt kamen Reklamationen wegen fehlerhafter Kamera von 2,325 % der Kunden eines MÄH-ROBBY-23. [6]
Ermitteln Sie den Anteil der Kameralieferungen, der vom Hersteller **NewCam (NC)** stammte.
- 3.5.2 Wegen der höheren Zuverlässigkeit der Kameras von **NewCam (NC)** wurden die Lieferquoten ab April 2023 geändert: [6]
NewCam (NC) liefert nun 75 % der Kameras, **RobbCam (RC)** den Rest.
Bei einem MÄH-ROBBY-23 der neuesten Produktionslinie wurde die Kamera reklamiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von **NewCam (NC)**?

Aufgabe 3: Stochastik (mit Mährobotern)

3.6 Die Mähroboter werden alle mit gleichen Batterie-Akku-Typen eines einzigen Herstellers bestückt. Die Mäh-Betriebsdauer eines **vollgeladenen Akkus** ist näherungsweise normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 120$ Minuten und einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ Minuten.

3.6.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Mähvorgang mit einem **vollgeladenen Akku** mindestens 130 Minuten lang geführt werden?

[9]

Stellen Sie das Ergebnis auch mittels einer Skizze dar.

3.6.2 Kunde Heribert Grünfrosch braucht einen Mähroboter mit einer Mindestlaufzeit von 1 h 40 min.

[9]

Prüfen Sie, ob diese Anforderung mittels der Mindest-Akku-Laufzeit seitens des Herstellers für den Mähroboter (**mit vollgeladenem Akku**) mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % garantiert werden kann?

Stellen Sie das Ergebnis auch mittels einer Skizze dar.

3.7 Ein neuer Hersteller garantiert aufgrund einer geänderten Batterie-Technologie mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % eine Mähdauer von mindestens 150 Minuten; die Standardabweichung beträgt $\sigma = 5$ Minuten.

3.7.1 Welche durchschnittliche Akku-Laufzeit ist bei diesem Angebot zu erwarten?

[8]

3.7.2 Zudem steht folgende Behauptung des neuen Herstellers im Raum:

[6]

„Unter 300 getesteten Batterien haben 290 Batterien eine Mindestlaufzeit von 150 Minuten. Das bestätigt die 98%-Garantie unserer Produkte.“

Untersuchen Sie, ob diese Behauptung auf der Basis einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % haltbar ist.

Ermitteln Sie hierzu die Erfolgswahrscheinlichkeiten, die mit dem Stichprobenergebnis vereinbar sind.

Aufgabe 3: Stochastik (mit Mährobotern)

Anlage I: Tabelle zur Normalverteilung

Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$. Beispiel: $\Phi(1.23) = 0.8907$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Aufgabe 3: Stochastik (mit Mährobotern)

Anlage II: Sigma-Regeln

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße/-variable X mit den Parametern n und p ,
dem Erwartungswert $\mu(X) = n \cdot p$

und der Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ mit der Bedingung $\sigma(X) > 3$
erhält man folgende Näherungen:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(|X - \mu| \leq \sigma) = 0,683$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = 0,954$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 0,997$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) = P(|X - \mu| \leq 1,64\sigma) = 0,90$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) = P(|X - \mu| \leq 1,96\sigma) = 0,95$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \stackrel{\text{symmetrisch}}{=} P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) = P(|X - \mu| \leq 2,58\sigma) = 0,99$$

Bezogen auf die Standardnormalverteilung:

→ Sigma-Intervall für 95%-Umgebung: $\pm 1,96\sigma$ [Tabelle: 0,975]

→ Sigma-Intervall für 90%-Umgebung: $\pm 1,64\sigma$ [Tabelle: 0,95]

→ Sigma-Intervall für 99%-Umgebung: $\pm 2,58\sigma$ [Tabelle: 0,995]

Anlage III: Ergänzungen zur Formelsammlung

Konfidenzintervall: $X = n \cdot p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \rightarrow (n \cdot p - X)^2 = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$

Konfidenzintervall (Abschätzung): $\rightarrow p = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S \cdot (1-p_S)}{n}}$

Mindestumfang einer Stichprobe: $n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{d^2} \cdot p_S \cdot (1-p_S) \xrightarrow[p \text{ unbekannt}]{p^{(\max)} = \frac{1}{2}} n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4d^2}$

mit $d = |h - p|$ bzw. zugelassener Abweichung