Informationen zur diskreten Zufallsvariablen

Rechengesetze zu Mittelwerten …

Lineare Transformation des MW

Beh. 1: $E(a\cdot X+b) \;=\; a\cdot E(X)+b$

Beh. 2: $E(X+Y) \;=\; E(X)+E(Y)$

Beh. 3: $E(b) \;=\; b$

Beh. 4: Monotonie I: $\textit{Ist } X \le Y \textit{ und } E(X)+E(Y) \textit{ existieren} \;\Rightarrow\; E(X) \;\le\; E(Y)$

Beh. 5: Monotonie II $\left|E(X)\right| \;\le\; E(\left|X\right|)$

Beh. 6: Dreiecksungleichung I und II:

$$E(\left|X+Y\right|) \;\le\; E(\left|X\right|)+E(\left|Y\right|) \qquad \left|E(X+Y)\right| \;\le\; \left|E(X)\right|+\left|E(Y)\right|$$

Beh. 7: $E(X\cdot Y) \;\ne\; E(X)\cdot E(Y)$

… und der Varianz

Beh. 8: $V(a\cdot X)=a^2\cdot V(X) \quad \textit{und} \quad V(X+b)=V(X)$

Zusammengefasst: $V(a\cdot X+b) \;=\; a^2\cdot V(X)$

Beh. 9: $V(aX\pm bY) \;=\; a^2\cdot V(X)+b^2\cdot V(Y)+2ab\cdot Cov(X;Y)$

$$\xrightarrow{\text{für } a=b=1} V(X\pm Y) \;=\; V(X)+V(Y)+2\cdot Cov(X;Y)$$

$$\textit{mit Sonderfall}: \quad Cov(X;Y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad X;Y \textit{ unabhängig}$$

Allgemeine Darstellung für n Summanden:

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) &= V(a_1X_1+\ldots+a_nX_n) \\ &= a_1^{\,2}\cdot V(X_1)+\ldots+a_n^{\,2}\cdot V(X_n)+2a_1a_2\cdot Cov(X_1;X_2)+2a_1a_3\cdot Cov(X_1;X_3)+\ldots+2a_{n-1}a_n\cdot Cov(X_{n-1};X_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2}\cdot V(X_k) \;+\; 2\sum_{\substack{k=1;\\ k<t}}^{n} a_k a_t\cdot Cov(X_k;X_t) \end{aligned}$$

Allgemeine Darstellung für n Summanden:

$Cov(X;Y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad X;Y \textit{ unabhängig}:$

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) \;=\; V(a_1X_1+\ldots+a_nX_n) \;=\; a_1^{\,2}\cdot V(X_1)+\ldots+a_n^{\,2}\cdot V(X_n) \;=\; a_k^{\,2}\cdot V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

Bew. 1:

$$E(a\cdot X+b) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i+b) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b$$

$$= \quad a\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)+\frac{1}{n}\cdot n\cdot b \quad = \quad a\cdot\bar{x}+b \quad = \quad a\cdot E(X)+b$$

Bew. 2:

$$E(X+Y) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$= \quad \bar{x}+\bar{y} \quad = \quad E(X)+E(Y)$$

Bew. 3:

$$E(b) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b \quad \underset{n-mal}{\overset{b+b+...+b}{=}} \quad \frac{1}{n}\cdot n\cdot b \quad = \quad b$$

Bew. 7:

$$E(X\cdot Y) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i) \quad = \quad \frac{1}{n}(x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+...+x_n\cdot y_n)$$

$$\neq \quad \frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)\cdot\frac{1}{n}(y_1+y_2+...+y_n) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$= \quad E(X)\cdot E(Y)$$

Bew. 8:

$$V(a\cdot X) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i)^2 \quad - \quad (a\cdot\bar{x})^2$$

$$= \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^2\cdot x_i^{\,2} \quad - \quad a^2\cdot\bar{x}^2 \quad = \quad a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2} \quad - \quad a^2\cdot\bar{x}^2$$

$$= \quad a^2\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\bar{x}^2\right) \quad = \quad a^2\cdot V(X)$$

$$V(X+b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+b)^2 - (\bar{x}+b)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}+2\cdot x_i\cdot b+b^2) - (\bar{x}^{\,2}+2\cdot\bar{x}\cdot b+b^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2} + 2\cdot b\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + b^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 - \bar{x}^{\,2}-2\cdot\bar{x}\cdot b-b^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2} + 2\cdot b\cdot\bar{x} + b^2\cdot\frac{1}{n}\cdot n - \bar{x}^{\,2} - 2\cdot\bar{x}\cdot b - b^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2} + 2\cdot b\cdot\bar{x} + b^2 - \bar{x}^{\,2} - 2\cdot\bar{x}\cdot b - b^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\bar{x}^{\,2} = V(X)$$

Bew. 9:

$$V(X\pm Y) = V(X)+V(Y)+2\cdot Cov(X;Y)$$

$$Sonderfall: \quad Cov(X;Y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad X;Y\ unabhängig$$

$$V(X\pm Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i\pm y_i)^2 - (\bar{x}\pm\bar{y})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}\pm 2\cdot x_i\cdot y_i+y_i^{\,2}) - (\bar{x}^{\,2}\pm 2\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{y}^{\,2})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\pm 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2} - \bar{x}^{\,2}\mp 2\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}-\bar{y}^{\,2}$$

$$= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\bar{x}^{\,2}\right]+\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}-\bar{y}^{\,2}\right] \pm 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)\mp 2\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}$$

$$= V(X) + V(Y) + 2\cdot\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)-\bar{x}\cdot\bar{y}\right]$$

$$= V(X) + V(Y) + 2\cdot\left[E(x\cdot y)-E(X)\cdot E(Y)\right]$$

$$= V(X) + V(Y) + 2\cdot Cov(X;Y)$$

Diskrete Zufallsvariable - Herleitung: **Varianz (einer Grundgesamtheit)**

Beh.: $V(X) \overset{Def.}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \overset{Berechnung}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$

Bew.:

$$V(X) \overset{Def.}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-2x_i\bar{x}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\bar{x}^2\cdot\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$V(X) \underset{\sum_{i=1}^{n} 1 = n}{\overset{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}}{=}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \frac{1}{n}\bar{x}^2\cdot n$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$V(X) \overset{Berechnung}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

Reelle Zufallsvariable mit Dichtefunktion

Informationen zu Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Zuerst noch ein paar Formeln als Grundlage zur Berechnung der Aufgaben:

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen X mit $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ **:**

$$\mu \quad = \quad E(X) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz einer diskreten Zufallsvariablen:

$$\sigma^2 \quad = \quad V(X) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \cdot P(X = x_i) - \mu^2$$

Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen:

$$\sigma \quad = \quad S(X) \quad = \quad \sqrt{V(X)}$$

Erwartungswert und Varianz einer diskreten Verteilung (ganzzahlig)

$$\mu(X) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P(X = x_k)$$

$$\sigma^2(X) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 \cdot P(X = x_k) - \mu^2$$

Konkret zur Binomialverteilung:

$$\mu(X) \quad = \quad n \cdot p$$

$$\sigma^2(X) \quad = \quad n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Erwartungswert und Varianz einer Dichtefunktion (stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung)

$$\mu(X) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot f(x))\,dx$$

$$\sigma^2(X) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left((x - \mu)^2 \cdot f(x)\right)dx$$

Einfaches Sigma-Intervall:

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma)$$

$$= \Phi(1)-\Phi(-1) = 2\Phi(1)-1 = 2\cdot 0,8413-1 = 0,6826$$

$$z_2 = \frac{k_2-\mu}{\sigma} = \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

$$z_1 = \frac{k_1-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} = \frac{-\sigma}{\sigma} = -1$$

Zweifaches Sigma-Intervall:

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma)$$

$$= \Phi(2)-\Phi(-2) = 2\Phi(2)-1 = 2\cdot 0,9772-1 = 0,9544$$

$$z_2 = \frac{k_2-\mu}{\sigma} = \frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma} = \frac{2\sigma}{\sigma} = 2$$

$$z_1 = \frac{k_1-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} = \frac{-2\sigma}{\sigma} = -2$$

Dreifaches Sigma-Intervall:

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma)$$

$$= \Phi(3)-\Phi(-3) = 2\Phi(3)-1 = 2\cdot 0,9987-1 = 0,9974$$

90%, 95% und 99%-Intervalle => Grenzen

$\rightarrow$ Sigma-Intervall für 90%-Umgebung: $\pm 1{,}64\sigma\ [Tabelle: 0{,}95]$

$\rightarrow$ Sigma-Intervall für 95%-Umgebung: $\pm 1{,}96\sigma\ [Tabelle: 0{,}975]$

$\rightarrow$ Sigma-Intervall für 99%-Umgebung: $\pm 2{,}58\sigma\ [Tabelle: 0{,}995]$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu-1{,}64\sigma \le X \le \mu+1{,}64\sigma) = 0{,}9$$

$$z_2 = \frac{k_2-\mu}{\sigma} = \frac{\mu+1{,}64\sigma-\mu}{\sigma} = \frac{1{,}64\sigma}{\sigma} = 1{,}64$$

$$z_1 = \frac{k_1-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-1{,}64\sigma-\mu}{\sigma} = \frac{-1{,}64\sigma}{\sigma} = -1{,}64$$

$$\xrightarrow{neue\ Grenzen} \Delta k = 1{,}64\sigma \xrightarrow{\sigma=50} \Delta k = 1{,}64\cdot 50 = 82 \rightarrow [98/262]$$

$analog:$

$$\xrightarrow{neue\ Grenzen\,(95\%\rightarrow 97{,}5\%)} \Delta k = 1{,}96\sigma \xrightarrow{\sigma=50} \Delta k = 1{,}96\cdot 50 = 98 \rightarrow [82/278]$$

$$\xrightarrow{neue\ Grenzen\,(99\%\rightarrow 99{,}5\%)} \Delta k = 2{,}58\sigma \xrightarrow{\sigma=50} \Delta k = 2{,}58\cdot 50 = 129 \rightarrow [51/309]$$