

Lineare Optimierung

	Bearbeitungszeit für P_1	Bearbeitungszeit für P_2	Kapazität
M_1	20	40	8.000
M_2	15	10	3.000
M_3	30	10	5.400

a) Der Deckungsbeitrag pro ME beträgt 90 GE von P_1 und 120 GE von P_2 .

Anzahl Produkte P_1 : x

Anzahl Produkte P_2 : y

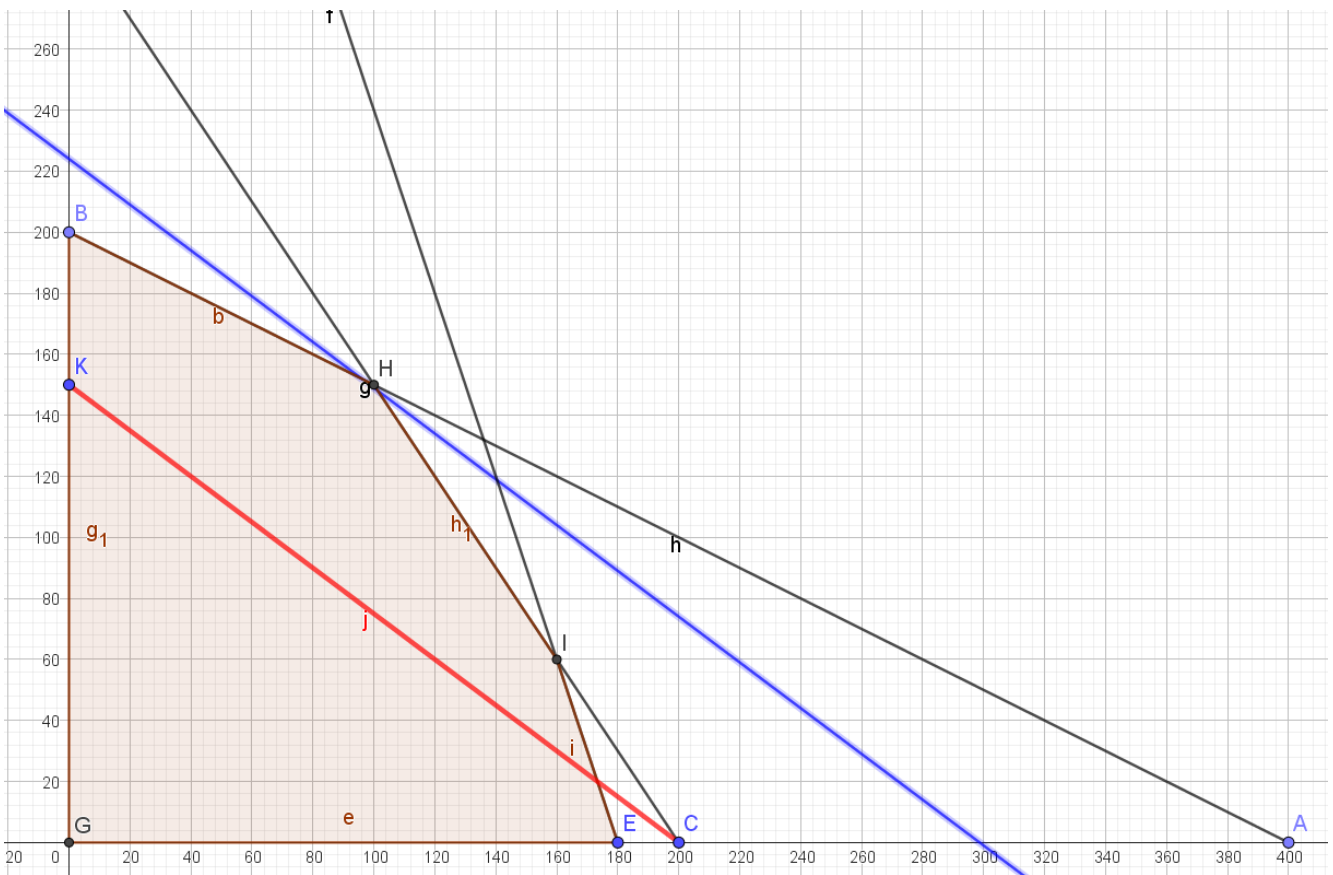
Restriktionen / Nebenbedingungen :

Schlupf variablen

i	$20x + 40y \leq 8000$	(400 0)	(0 200)	$20x + 40y + u_1 = 8000$
ii	$15x + 10y \leq 3000$	(200 0)	(0 300)	$15x + 10y + u_2 = 3000$
iii	$30x + 10y \leq 5400$	(180 0)	(0 540)	$30x + 10y + u_3 = 5400$

Zielfunktion: $90x + 120y \rightarrow \max.$

Annahme zum Zeichnen: 18000 (200 | 0) (0 | 150)



Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

M_1	$20x + 40y \leq 8.000$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$20x + 40y + u_1 = 8.000$
M_2	$15x + 10y \leq 3.000$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$15x + 10y + u_2 = 3.000$
M_3	$30x + 10y \leq 5.400$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$30x + 10y + u_3 = 5.400$

Zielfunktion: $G(x, y) = 90x + 120y \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	20	40	1	0	0	8.000	$\xrightarrow{\frac{8.000-200}{40}} \frac{1}{40}i$
ii	15	10	0	1	0	3.000	$\frac{3.000}{10} = 300$
iii	30	10	0	0	1	5.400	$\frac{5.400}{10} = 540$
ZF	90	120	0	0	0	G	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{40}$	0	0	200	
ii	15	10	0	1	0	3.000	$ii - 10i$
iii	30	10	0	0	1	5.400	$iii - 10i$
ZF	90	120	0	0	0	G	$ZF - 120i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{40}$	0	0	200	$\frac{200}{0,5} = 400$
ii	10	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	1.000	$\xrightarrow{\frac{1.000-100}{10}} \frac{1}{10}ii$
iii	25	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	3.400	$\frac{3.400}{25} = 136$
ZF	30	0	-3	0	0	$G - 24.000$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{40}$	0	0	200	$i - \frac{1}{2}ii$
ii	1	0	$-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	0	100	
iii	25	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	3.400	$iii - 25ii$
ZF	30	0	-3	0	0	$G - 24.000$	$ZF - 30ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	1	$\frac{3}{80}$	$-\frac{1}{20}$	0	150	
ii	1	0	$-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	0	100	
iii	0	0	$\frac{3}{8}$	-2,5	1	900	
ZF	0	0	-2,25	-3	0	$G - 27.000$	

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 900 \end{pmatrix}$ mit $G = 27.000$

- (1) $x \geq 0; y \geq 0$
 (2) $2x + 3y \leq 30$
 (3) $2x + 2y \leq 24$
 (4) $x \leq 10$
 (5) $Z(x, y) = 15x + 10y \rightarrow \max$

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

i	$2x + 3y \leq 30$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$2x + 3y + u_1 = 30$
ii	$2x + 2y \leq 24$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$2x + 2y + u_2 = 24$
iii	$x \leq 10$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$x + u_3 = 10$

Zielfunktion: $G(x, y) = 15x + 10y \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	2	3	1	0	0	30	$30/2 = 15 \rightarrow i - 2iii$
ii	2	2	0	1	0	24	$24/2 = 12 \rightarrow ii - 2iii$
iii	1	0	0	0	1	10	$10/1 = 10$
ZF	15	10	0	0	0	G	$ZF - 15iii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	3	1	0	-2	10	
ii	0	2	0	1	-2	4	
iii	1	0	0	0	1	10	
ZF	0	10	0	0	-15	$G - 150$	

weiter

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	3	1	0	-2	10	$10/3 = 3,33$
ii	0	2	0	1	-2	4	$4/2 = 2 \rightarrow ii/2$
iii	1	0	0	0	1	10	
ZF	0	10	0	0	-15	$G - 150$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	3	1	0	-2	10	$i - 3ii$
ii	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	2	
iii	1	0	0	0	1	10	
ZF	0	10	0	0	-15	$G - 150$	$ZF - 10ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	0	1	-1,5	1	4	
ii	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	2	
iii	1	0	0	0	1	10	
ZF	0	0	0	-5	-5	$G - 170$	

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $G = 170$

Sonderfall 1: Zielfunktion mit identischen Koeffizienten

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

i	$2x+6y \leq 30$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$2x+6y+u_1=30$
ii	$15x+10y \leq 90$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$15x+10y+u_2=90$
iii	$5x+10y \leq 60$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$5x+10y+u_3=60$

Zielfunktion: $G(x,y)=10x+10y \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	2	6	1	0	0	30	
ii	15	10	0	1	0	90	
iii	5	10	0	0	1	60	
ZF	10	10	0	0	0	G	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	2	6	1	0	0	30	$30/6=5 \rightarrow i/6$
ii	15	10	0	1	0	90	$90/10=9$
iii	5	10	0	0	1	60	$60/10=6$
ZF	10	10	0	0	0	G	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	
ii	15	10	0	1	0	90	$ii-10i$
iii	5	10	0	0	1	60	$iii-10i$
ZF	10	10	0	0	0	G	$ZF-10i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	$5/\frac{1}{3}=15$
ii	$\frac{35}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	40	$40/\frac{35}{3}=\frac{24}{7} \rightarrow ii/\frac{35}{3}$
iii	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	10	$10/\frac{5}{3}=6$
ZF	$\frac{20}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	G-50	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	$i-\frac{1}{3}ii$
ii	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{35}$	0	$\frac{24}{7}$	
iii	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	10	$iii-\frac{5}{3}ii$
ZF	$\frac{20}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	G-50	$ZF-\frac{20}{3}ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	1	$\frac{1}{6}+\frac{1}{21}$	$-\frac{1}{35}$	0	$5-\frac{8}{7}=\frac{27}{7}$	
ii	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{35}$	0	$\frac{24}{7}$	
iii	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	10	$iii-\frac{5}{3}ii$
ZF	0	0	$-\frac{5}{3}+\frac{20}{21}$	$-\frac{4}{7}$	0	$G-50-\frac{24}{7}\cdot\frac{20}{3}=G-50-\frac{160}{7}$	

Alternative:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	2	6	1	0	0	30	$30/2=15$
ii	15	10	0	1	0	90	$90/15=6$
iii	5	10	0	0	1	60	$60/5=12$
ZF	10	10	0	0	0	G	

Sonderfall 2: Steigung von Zielfunktion und mind. einer Restriktion-NB sind identisch

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

i	$3x + 6y \leq 30$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$3x + 6y + u_1 = 30$
ii	$18x + 10y \leq 90$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$18x + 10y + u_2 = 90$
iii	$10x + 10y \leq 60$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$10x + 10y + u_3 = 60$

Zielfunktion: $G(x, y) = 10x + 10y \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	3	6	1	0	0	30	$30/6=5 \rightarrow i/6$
ii	18	10	0	1	0	90	$90/10=9$
iii	10	10	0	0	1	60	$60/10=6$
ZF	10	10	0	0	0	G	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0,5	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	
ii	18	10	0	1	0	90	$ii - 10i$
iii	10	10	0	0	1	60	$iii - 10i$
ZF	10	10	0	0	0	G	$ZF - 10i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0,5	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	
ii	13	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	40	
iii	5	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	10	$iii/5$
ZF	5	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$G - 50$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0,5	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	$i - 0,5iii$
ii	13	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	40	$ii - 13iii$
iii	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	0,2	2	
ZF	5	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$G - 50$	$ZF - 5iii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	1	$\frac{1}{3}$	0	-0,1	4	
ii	0	0	$\frac{8}{3}$	1	-2,6	14	
iii	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	0,2	2	
ZF	0	0	0	0	-1	$G - 60$	$ZF - 5iii$

$$\text{Lösung: } L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \right\} \quad G = 60$$

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

i	$3x + 6y \leq 30$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$3x + 6y + u_1 = 30$
ii	$18x + 10y \leq 90$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$18x + 10y + u_2 = 90$
iii	$10x + 10y \leq 60$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$10x + 10y + u_3 = 60$

Zielfunktion: $G(x, y) = 10x + 10y \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	3	6	1	0	0	30	$30/3 = 10$
ii	18	10	0	1	0	90	$90/18 = 5 \rightarrow ii/18$
iii	10	10	0	0	1	60	$60/10 = 6$
ZF	10	10	0	0	0	G	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	3	6	1	0	0	30	$i - 3ii$
ii	1	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{18}$	0	5	
iii	10	10	0	0	1	60	$iii - 10ii$
ZF	10	10	0	0	0	G	$ZF - 10ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	$\frac{13}{3}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	15	$15/\frac{13}{3} = \frac{45}{13}$
ii	1	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{18}$	0	5	$5/\frac{5}{9} = 9$
iii	0	$\frac{40}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	1	10	$10/\frac{40}{9} = \frac{9}{4} \rightarrow iii/\frac{40}{9}$
ZF	0	$\frac{40}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	0	$G - 50$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	$\frac{13}{3}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	15	$i - \frac{13}{3}iii$
ii	1	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{18}$	0	5	$ii - \frac{5}{9}iii$
iii	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{4}$	
ZF	0	$\frac{40}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	0	$G - 50$	$ZF - \frac{40}{9}iii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	0	1	$-\frac{1}{6} + \frac{13}{24}$	$-\frac{13}{3} \cdot \frac{9}{40}$	15	$15 - \frac{13}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{21}{4} = 5,25$
ii	1	0	0	$\frac{1}{18} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	5	$5 - \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{4} = 3,75$
iii	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4} = 2,25$
ZF	0	0	0	0	-1	$G - 50 - 10 = G - 60$	

Lösung: $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,75 \\ 2,25 \\ 5,25 \end{pmatrix} \right\} G = 60$

Lösung: $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \right\} G = 60$

Lösung: $L_{\text{gesamt}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2/3, 75] \\ [2,25/4] \end{pmatrix} \right\} G = 60$

Graphische Darstellung:

