Lineare Ungleichungssysteme - Graphische Lösung & Simplexalgorithmus

Aufgabe 1

Ein Bäcker hat 2.520 g Mehl, 1.080 g Weizen und 1.920 g Roggen zur Verfügung, um zwei Sorten Brot zu backen. Für die Herstellung eines Brotes der Sorte A benötigt er 360 g Mehl, 120 g Weizen und 120 g Roggen. Für die Herstellung eines Brotes der Sorte B werden 180 g Mehl, 120 g Weizen und 240 g Roggen benötigt. Der Gewinn aus dem Verkauf eines Brotes der Sorte A beträgt 30 GE. Mit dem Verkauf eines Brotes der Sorte B erzielt der Bäcker einen Gewinn von 40 GE. In der unten stehenden Tabelle sind die Angaben noch einmal übersichtlich zusammengestellt. Der Bäcker ist bestrebt den Gesamtgewinn aus der Herstellung und dem Verkauf beider Brotsorten zu maximieren. Der Absatz der beiden Brotsorten kann dabei als sicher angenommen werden. Es gelten darüber hinaus die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen.

	Sorte A	Sorte B	Kapazität
Mehl	360 g / Brot	180 g / Brot	2.520 g
Weizen	120 g / Brot	120 g / Brot	1.080 g
Roggen	120 g / Brot	240 g / Brot	1.920 g
Stückgewinne	30 GE / Brot	40 GE / Brot	

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Bäckers durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).

b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Brotsorten (Möglichkeitenmenge) für den Bäcker ablesen lässt.

c) Lösen Sie das Maximierungsproblem des Bäckers aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isogewinnlinien. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Kombination beider Brotsorten.

d) Welche der drei Restriktionen aus a) ist im Gewinnmaximum aus c) nicht bindend und wie groß ist die freie Kapazität der betreffenden Ressource im Gewinnmaximum?

e) In Abwandlung zur bisherigen Aufgabenstellung kann der Bäcker mit dem Verkauf eines Brotes der Sorte A einen Gewinn von 80 GE erzielen, bei ansonsten gleichen Prämissen. Wie lautet die veränderte Zielfunktion des Bäckers? Bestimmen Sie bei dieser veränderten Zielfunktion erneut die gewinnmaximierende Kombination beider Brotsorten.

Aufgabe 2

Ein ökologischer Landwirt will 90 ha Land mit Getreide und Hopfen bebauen. Getreide erfordert einen Arbeitsaufwand von 3 Tagen je ha und einen Kapitalaufwand von 400 € je ha. Bei Hopfen ist ein Arbeitsaufwand von 4 Tagen je ha und ein Kapitalaufwand von 200 € je ha notwendig. Wegen der besonderen Bodenqualität müssen mindestens 50 ha Land mit Hopfen angebaut werden. Für die Bewirtschaftung der 90 ha Land stehen dem Landwirt maximal 360 Arbeitstage und maximal 24.000 € Kapital zur Verfügung. Der Absatz von Getreide und Hopfen kann als sicher angenommen werden. Es gilt darüber hinaus die Nichtnegativitätsbedingung für den Getreideanbau.

a) Welche Aufteilung des Landes muss gewählt werden, wenn mit einem ha Getreide ein Gewinn von 450 € und mit einem ha Hopfen ein Gewinn von 150 € erzielt werden kann und der Gewinn des Landwirtes maximiert werden soll? Formulieren Sie zunächst das Maximierungsproblem des ökologischen Landwirtes durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen) und erstellen Sie dann eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Anbauarten ablesen lässt.

b) Welche Restriktion(en) ist / sind im Gewinnmaximum aus a) nicht bindend und wie groß ist / sind die freie(n) Kapazität(en) der betreffenden Ressource(n)?

Aufgabe 3

Ein Dozent hält Vorlesungen in den Fachrichtungen Jura und BWL. Die Aufteilung der Lehrtätigkeit auf die beiden Fachrichtungen ermittelt der Dozent mit Methoden der linearen Optimierung. Ihm stehen pro Monat 48 Stunden zur Verfügung, um seine Vorlesungen zu halten. Zudem verfügt der Dozent monatlich über 54 Stunden zur Vorbereitung der Vorlesungen. Sowohl Jura-Vorlesungen, als auch BWL-Vorlesungen haben eine Dauer von jeweils 4 Stunden. Für die Vorbereitung einer Jura-Vorlesung benötigt er 3 Stunden, während eine BWL-Vorlesung in 6 Stunden vorbereitet ist. Der Dozent muss darüber hinaus mindestens 2 und maximal 9 Jura-Vorlesungen pro Monat halten. Er erzielt einen Gewinn von 36 GE für jede gehaltene Jura-Vorlesung und 72 GE für jede gehaltene BWL-Vorlesung. Der Dozent ist bestrebt, den monatlichen Gesamtgewinn aus seiner Lehrtätigkeit zu maximieren. Die Auftragslage des Dozenten kann dabei als sicher angenommen werden. Zudem ist die übliche Nichtnegativitätsbedingung für BWL-Vorlesungen einzuhalten.

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Dozenten durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).
b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Vorlesungen (Möglichkeitenmenge) für den Dozenten ablesen lässt.
c) Lösen Sie das Maximierungsproblem des Dozenten aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isogewinnlinien. Welche Aufteilung der beiden Vorlesungen sollte der Dozent wählen?
d) In Abwandlung zur bisherigen Aufgabenstellung kann der Dozent einen Gewinn von 45 GE je gehaltener Jura-Vorlesung und 60 GE je gehaltener BWL-Vorlesung erzielen, bei ansonsten gleichen Prämissen. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Aufteilung der beiden Vorlesungen.
e) In Abwandlung zur bisherigen Aufgabenstellung kann der Dozent einen Gewinn von 50 GE je gehaltener Jura-Vorlesung und 40 GE je gehaltener BWL-Vorlesung erzielen, bei ansonsten gleichen Prämissen. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Aufteilung der beiden Vorlesungen.

Aufgabe 4

Ein Barkeeper mixt auf einer Studentenparty der Rheinischen Fachhochschule Köln zwei Cocktails. Dabei kann er erfreut feststellen, dass die Methoden der linearen Optimierung praxisnah angewendet werden können. Dem Barkeeper stehen vier verschiedene Zutaten zur Verfügung, um einen Cocktail zu mixen. Für das Mixen eines Cocktails der Sorte A benötigt der Barkeeper 6 cl Wodka, 5 cl Rum, 6 cl Cola und 3 cl Lemon. Beim Mixen eines Cocktails der Sorte B werden 4 cl Wodka, 5 cl Rum, 8 cl Cola und 8 cl Lemon verbraucht. Der Gewinn aus dem Verkauf eines Cocktails der Sorte A beträgt 48 GE, während mit dem Verkauf eines Cocktails der Sorte B ein Gewinn von 72 GE erzielt wird. Dem Barkeeper stehen insgesamt 132 cl Wodka, 120 cl Rum, 168 cl Cola und 144 cl Lemon zur Verfügung. In der unten stehenden Tabelle sind die Angaben übersichtlich zusammengestellt. Der Barkeeper ist bestrebt den Gesamtgewinn aus dem Verkauf beider Cocktailsorten zu maximieren. Der Absatz kann dabei als sicher angenommen werden. Es gelten zudem die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen.

	Sorte A	Sorte B	Kapazität
Wodka	6 cl / Cocktail	4 cl / Cocktail	132 cl
Rum	5 cl / Cocktail	5 cl / Cocktail	120 cl
Cola	6 cl / Cocktail	8 cl / Cocktail	168 cl
Lemon	3 cl / Cocktail	8 cl / Cocktail	144 cl
Stückgewinne	48 GE / Cocktail	72 GE / Cocktail	

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Barkeepers durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).
b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Cocktailsorten (Möglichkeitenmenge) für den Barkeeper ablesen lässt.
c) Lösen Sie das Maximierungsproblem des Barkeepers aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isogewinnlinien, indem Sie die gewinnmaximierende Kombination beider Cocktailsorten bestimmen.

Aufgabe 5

Gegeben ist ein Problem der linearen Optimierung. Zwei Produkte werden auf drei Maschinen hergestellt. Aufgrund von Kapazitätsbeschränkungen der drei Maschinen M_1, M_2 und M_3 ergeben sich für die produzierbaren Mengen x_1 und x_2 der beiden Produkte P_1 und P_2 folgende Restriktionen.

M_1: $3x_1 + x_2 \leq 200$

M_2: $x_1 + x_2 \leq 120$

M_3: $x_1 + 3x_2 \leq 240$

Es gelten die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen für die produzierbaren Mengen x_1 und x_2. Der Gewinn $G(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ ist zu maximieren. Mit y_1, y_2 und y_3 werden die Hilfsvariablen für die drei Restriktionen bezeichnet. Als Endtableau des Simplex-Algorithmus ergibt sich:

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	G	
0	0	1	− 2,5	0,5	0	20
1	0	0	1,5	− 0,5	0	60
0	1	0	− 0,5	0,5	0	60
0	0	0	1,5	0,5	1	300

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Maschine M_1 ist vollständig ausgelastet.

b) Maschine M_2 ist nicht vollständig ausgelastet.

c) Die gewinnmaximierende Lösung beläuft sich auf $x_1 = 20$ ME und $x_2 = 60$ ME.

d) Der Gewinn im Optimum beträgt 300 GE.

e) Erhöht man die Kapazität von Maschine M_3 um eine ME, so steigt der Gewinn um 0,5 GE.

f) Reduziert man die Kapazität von Maschine M_1 um eine ME, so steigt der Gewinn um 20 GE.

g) Erhöht man die Kapazität von Maschine M_2 um eine ME, so steigt die Produktion von Produkt P_2 um 1,5 ME.

h) Erhöht man die Kapazität von Maschine M_2 um eine ME, so sinkt die Produktion von Produkt P_2 um 0,5 ME.

i) Reduziert man die Kapazität von Maschine M_3 um 2 ME, so steigt die Produktion von Produkt P_1 um eine ME.

Aufgabe 6

Ein Unternehmen produziert die beiden Produkte P_1 und P_2 aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4. Die benötigten Rohstoffmengen zur Herstellung einer Produkteinheit, die insgesamt verfügbaren Rohstoffmengen sowie die Stückgewinne für eine Produkteinheit können der folgenden Tabelle entnommen werden. Der Gewinn des Unternehmens soll maximiert werden. Es gelten die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen für die produzierbaren Mengen beider Produkte.

	P_1	P_2	Verfügbare Rohstoffmengen
R_1	1	2	100 ME
R_2	2	1,5	120 ME
R_3	0	2	80 ME
R_4	4	0	180 ME
Stückgewinne	15 GE / ME	60 GE / ME	

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Unternehmens durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).

b) Lösen Sie das Maximierungsproblem des Unternehmens aus a) mit der Simplex-Methode. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Kombination beider Produkte.

Aufgabe 7

Ein altmodischer Spielzeughersteller produziert lediglich die beiden Spiele A und B. Der Gewinn pro ME von Spiel A beträgt 4 GE. Bei Spiel B kann ein Gewinn von 5 GE pro ME erzielt werden. Die Produktion eines Spieles der Sorte A erfordert 4 Minuten für Bearbeitung, 3 Minuten für Montage und 6 Minuten für Verpackung. Die Produktion eines Spieles der Sorte B erfordert 4 Minuten für Bearbeitung, 6 Minuten für Montage und 4 Minuten für Verpackung. Dem Spielzeughersteller stehen 52 Minuten für Bearbeitung, 60 Minuten für Montage und 72 Minuten für Verpackung zur Verfügung. Er ist bestrebt den Gesamtgewinn aus der Herstellung und dem Verkauf beider Spiele zu maximieren. Der Absatz beider Spiele kann dabei als sicher angenommen werden. Es gelten darüber hinaus die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen.

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Spielzeugherstellers durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).

b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Sorten von Spielen (Möglichkeitenmenge) für den Spielzeughersteller ablesen lässt.

c) Lösen Sie das Maximierungsproblem des Spielzeugherstellers aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isogewinnlinien. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Kombination von Spielen beider Sorten.

d) Welche der drei Restriktionen aus a) ist im Gewinnmaximum aus c) nicht bindend und wie groß ist die freie Kapazität der betreffenden Ressource im Gewinnmaximum?

Aufgabe 8

Ein Konditor hat 1.350 kg Mehl, 1.260 kg Zucker, 1.650 kg Butter und 1.680 kg Schokolade zur Verfügung, um zwei Sorten von Hochzeitstorten zu backen. Für die Herstellung einer Hochzeitstorte der Sorte A benötigt er 75 kg Mehl, 63 kg Zucker, 66 kg Butter und 48 kg Schokolade. Für die Herstellung einer Hochzeitstorte der Sorte B werden 25 kg Mehl, 35 kg Zucker, 55 kg Butter und 60 kg Schokolade benötigt. Der Gewinn aus dem Verkauf einer Hochzeitstorte der Sorte A beträgt 25 GE, während mit dem Verkauf einer Hochzeitstorte der Sorte B ein Gewinn von 30 GE erzielt wird. In der unten stehenden Tabelle sind diese Angaben noch einmal übersichtlich zusammengestellt. Zudem muss der Konditor beachten, dass er auf Grund von Lieferverpflichtungen mindestens 3 Hochzeitstorten der Sorte B herstellen muss. Der Konditor ist bestrebt den Gesamtgewinn aus der Herstellung und dem Verkauf beider Sorten von Hochzeitstorten zu maximieren. Der Absatz der Hochzeitstorten beider Sorten kann dabei als sicher angenommen werden. Es gilt darüber hinaus eine Nichtnegativitätsbedingung für die Herstellung von Hochzeitstorten der Sorte A.

	Sorte A	Sorte B	Kapazität
Mehl	75 kg / Torte	25 kg / Torte	1.350 kg
Zucker	63 kg / Torte	35 kg / Torte	1.260 kg
Butter	66 kg / Torte	55 kg / Torte	1.650 kg
Schokolade	48 kg / Torte	60 kg / Torte	1.680 kg
Stückgewinne	25 GE / Torte	30 GE / Torte	

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Konditors durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).

b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Sorten von Hochzeitstorten (Möglichkeitenmenge) für den Konditor ablesen lässt.

c) Lösen Sie das Maximierungsproblem des Konditors aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isogewinnlinien, indem die gewinnmaximierende Kombination von Hochzeitstorten beider Sorten ermittelt wird. Welche der Restriktionen aus a) sind im Gewinnmaximum nicht bindend und wie groß sind die jeweils freien Kapazitäten der betreffenden Ressourcen im Gewinnmaximum?

d) In Abwandlung zur bisherigen Aufgabenstellung kann der Konditor mit dem Verkauf einer Hochzeitstorte der Sorte A einen Gewinn von 65 GE und mit dem Verkauf einer Hochzeitstorte der Sorte B einen Gewinn von 35 GE erzielen, bei ansonsten gleichen Prämissen. Bestimmen Sie abermals die gewinnmaximierende Kombination von Hochzeitstorten beider Sorten. Welche der Restriktionen aus a) sind im Gewinnmaximum nicht bindend und wie groß sind die jeweils freien Kapazitäten der betreffenden Ressourcen im Gewinnmaximum?

Ausblick – Minimierung:

Aufgabe 9

Ein Geflügelfarmer verwendet seit Jahren zwei Sorten Futter für die Fütterung seiner Legehennen. Jedes kg der Futtersorte A enthält 0,1 kg Eiweiß, 0,2 kg Fett und 0,1 kg Kohlenhydrate. Jedes kg der Futtersorte B enthält 0,2 kg Eiweiß, 0,1 kg Fett und 0,6 kg Kohlenhydrate. Der Rest jeder Futtersorte besteht aus nährwertlosen Stoffen. Im Rahmen seines berufsbegleitenden Studiums hat der Geflügelfarmer sich mit Methoden der linearen Optimierung beschäftigt und möchte sein erlerntes Wissen nun in der Praxis anwenden. Der Geflügelfarmer will aus den Futtersorten A und B eine Mischung herstellen, die insgesamt mindestens 1 kg Eiweiß, mindestens 0,8 kg Fett und mindestens 1,8 kg Kohlenhydrate enthält. Futtersorte A kostet 8 € je kg. Für Futtersorte B muss der Geflügelfarmer 12 € je kg aufbringen. Es gelten die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen für die beiden Futtersorten.

a) Formulieren Sie das Minimierungsproblem des Geflügelfarmers durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).
b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen beider Futtersorten (Möglichkeitenmenge) für den Geflügelfarmer ablesen lässt.
c) Wie viel kg jeder Futtersorte soll der Geflügelfarmer für die Herstellung der Futtermischung verwenden, so dass die Kosten für die Futtermischung minimiert werden?
d) Welche Restriktion aus a) ist im Kostenminimum aus c) nicht bindend und wie groß ist die überschüssige Kapazität der betreffenden Ressource im Kostenminimum?

Aufgabe 10

Ein Student der Rheinischen Fachhochschule Köln ernährt sich ausschließlich von Obst und Gemüse, die er möglichst kostengünstig einkaufen möchte. Dabei muss er darauf achten, die erforderlichen täglichen Mindestmengen an Eiweiß, Fett und Energie zu sich zu nehmen, damit er mit der nötigen Konzentration an den teilweise recht komplizierten Vorlesungen im Fach Wirtschaftsmathematik teilnehmen kann. Die Preise in GE für Obst und Gemüse und die Nährstoffzusammensetzungen in ME je 100 g Obst und je 100 g Gemüse sowie die täglichen Nährstoffmindestmengen können der Tabelle entnommen werden.

	Obst (100 g)	Gemüse (100 g)	Täglicher Mindestbedarf
Eiweiß	6 ME / 100 g	2 ME / 100 g	30 ME
Fett	2 ME / 100 g	2 ME / 100 g	22 ME
Energie	4 ME / 100 g	16 ME / 100 g	80 ME
Preise	2 GE / 100 g	4 GE / 100 g	

a) Formulieren Sie das Minimierungsproblem des Studenten durch eine geeignete Zielfunktion und ein System von Restriktionen (Ungleichungen).
b) Erstellen Sie eine geeignete Zeichnung, aus der sich die Menge der realisierbaren Kombinationen von Obst und Gemüse (Möglichkeitenmenge) für den Studenten ablesen lässt.
c) Lösen Sie das Minimierungsproblem des Studenten aus a) mit der grafischen Methode des Eckenvergleichs oder durch Einzeichnen der Isokostenlinien. Bestimmen Sie die kostenminimierende Kombination von Obst und Gemüse.
d) Welche der drei Restriktionen aus a) ist im Kostenminimum aus c) nicht bindend und wie groß ist die übererfüllte Bedarfsmenge des betreffenden Nährstoffs im Kostenminimum?