Klausur Wirtschaftsmathematik (20.06.2016)

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Themengebiete:

Aufgabe 1:	Matrizen & Vektoren	20 Pkte
Aufgabe 2:	Lineare Optimierung	20 Pkte
Aufgabe 3:	Differentialrechnung	20 Pkte
Aufgabe 4:	Deskriptive Statistik I	20 Pkte
Aufgabe 5:	Deskriptive Statistik II	20 Pkte

Punkteübersicht:

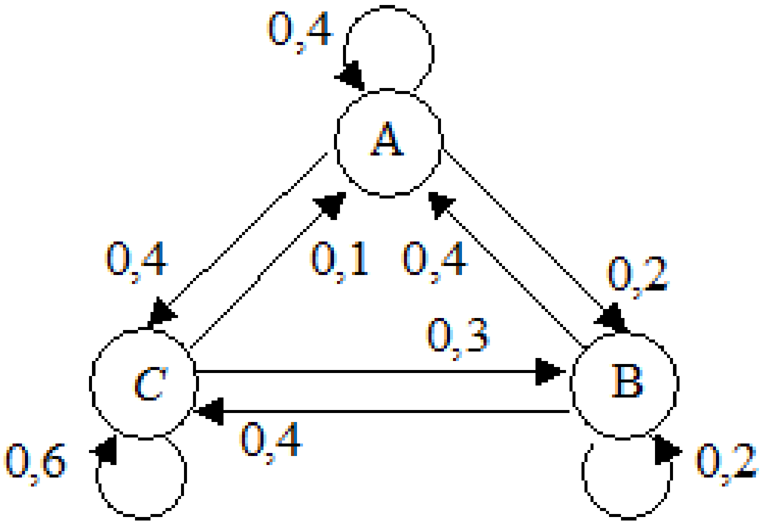
Aufgabe 1:		Aufgabe 4:	
Aufgabe 2:		Aufgabe 5:	
Aufgabe 3:			

Gesamtpunktzahl:		Note:	

Klausur Wirtschaftsmathematik (20.06.2016)

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

Zwischen drei Regionen A, B und C findet ein Bevölkerungsaustausch durch Umzüge statt. Das Diagramm zeigt diesen Austausch in Anteilen innerhalb eines Jahres.



Die Einwohnerzahlen in Tausend betrugen 2015 zu Beginn der Modellierung:

Region A: 100.000 **Region B: 50.000** **Region C: 50.000**

a) Bilden Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor.

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_{2015} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

b) Wie wird sich die Verteilung der Bevölkerung in den kommenden drei Jahren (2016 – 2018) entwickeln?

Lösung:

$$\vec{p}_{2016} = U \cdot \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,325 \\ 0,225 \\ 0,450 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{2017} = U \cdot \begin{pmatrix} 0,325 \\ 0,225 \\ 0,450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,265 \\ 0,245 \\ 0,490 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_{2018} = U \cdot \begin{pmatrix} 0,265 \\ 0,245 \\ 0,490 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,253 \\ 0,249 \\ 0,498 \end{pmatrix}$$

c) Gibt es auf lange Sicht eine stabile Verteilung im Sinne eines statischen Gleichgewichts?

Lösung: $\left(U-E\right)\vec{x}=\vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}0,25\\0,25\\0,50\end{pmatrix}$

(2) Differentialrechnung: Extrema ohne und mit Nebenbedingungen

Teil 1: Gegeben sei folgende Funktion:

$$f\left(x,y,z\right) = 500+2x^2y-y^2-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}z^2+6xy+\sqrt{5}\cdot xz$$

a) Zeigen Sie, dass nur drei stationäre Stellen vorliegen.

Lösung:

$$f_y\left(x,y,z\right) = 2x^2-2y+6x = 0 \rightarrow y = x^2+3x$$
$$f_z\left(x,y,z\right) = -z+\sqrt{5}\cdot x = 0 \rightarrow z = \sqrt{5}\cdot x$$

$$f_x\left(x,y,z\right) = 4xy-3x+6y+\sqrt{5}\cdot z = 0 \xrightarrow{y\text{ und } z\text{ einsetzen}}$$
$$4x\left(x^2+3x\right)-3x+6\left(x^2+3x\right)+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot x = 0 \rightarrow 4x^3+18x^2+20x = 0$$
$$\Rightarrow \quad S_1\left(0\mid 0\mid 0\right) \quad S_2\left(-2\mid -2\mid -4,47\right) \quad S_3\left(-2,5\mid -1,25\mid -5,59\right)$$

Prüfen Sie die stationären Stellen auf Extremwerteigenschaft.

Lösung:

$$H\left(f\right) = \begin{pmatrix}4y-3 & 4x+6 & \sqrt{5}\\ 4x+6 & -2 & 0\\ \sqrt{5} & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}\left(f\right) = \begin{pmatrix}-3 & 6 & \sqrt{5}\\ 6 & -2 & 0\\ \sqrt{5} & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}Det\left(H_1\right)=-3<0\\ Det\left(H_2\right)=-30<0\\ \Rightarrow indefinit \rightarrow SP\end{matrix}$$

$$H_{S_2}\left(f\right) = \begin{pmatrix}-11 & -2 & \sqrt{5}\\ -2 & -2 & 0\\ \sqrt{5} & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix}Det\left(H_1\right)=-11<0\\ Det\left(H_2\right)=18>0\\ Det\left(H_3\right)=-8<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}negativ\ definit\\ \rightarrow Maximum\end{matrix}\right.$$

$$H_{S_3}\left(f\right) = \begin{pmatrix}-8 & -4 & \sqrt{5}\\ -4 & -2 & 0\\ \sqrt{5} & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix}Det\left(H_1\right)=-8<0\\ Det\left(H_2\right)=0\\ Det\left(H_3\right)=10>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}indefinit\\ \rightarrow SP\end{matrix}\right.$$

Teil 2:

Bei einer Ein-Produktunternehmung liegt folgende Produktionsfunktion vor:

$$f(x, y) = 15 \cdot x^{0,3} \cdot y^{0,7}$$

wobei x und y die ME der beiden eingesetzten Produktionsfaktoren q_1 und q_2 darstellen. Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen q_1 = 5 GE und q_2 = 4 GE. Das Gesamtbudget beträgt 1.250,00 €.
Welchen Auftrag kann das Unternehmen möchte im Optimalfall unter Einhaltung der Budgetgrenze realisieren? Wie hoch ist das Produktionsergebnis?

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.

Lösung:

$$L(x, y, \lambda) = 15 \cdot x^{0,3} \cdot y^{0,7} + \lambda(1.250 - 5x - 4y)$$

$$L_x(x, y, \lambda) = \frac{9}{2} \cdot \frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} - 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{9}{10} \cdot \frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$L_y(x, y, \lambda) = \frac{21}{2} \cdot \frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} \cdot - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{21}{8} \cdot \frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

$$Austauschverhältnis: \quad y = \frac{35}{12} x$$

$$\xrightarrow{\text{mittels NB}} \quad x = 75 \quad und \quad y = 218,75 \quad und \quad f(75/218,75) = 2.379,98$$

Anmerkung: Auf einen Nachweis des Maximums kann hier verzichtet werden!

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

Lösung: $$\lambda = \frac{9}{10} \cdot \frac{218,75^{0,7}}{75^{0,7}} = 1,904$$

(3) Simplexalgorithmus: Lineare Optimierung

Ein Betrieb stellt auf drei Maschinen verschiedene Produkte her. Die Bearbeitungszeiten in Minuten für die Produkte A und B und deren Verkaufspreise sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

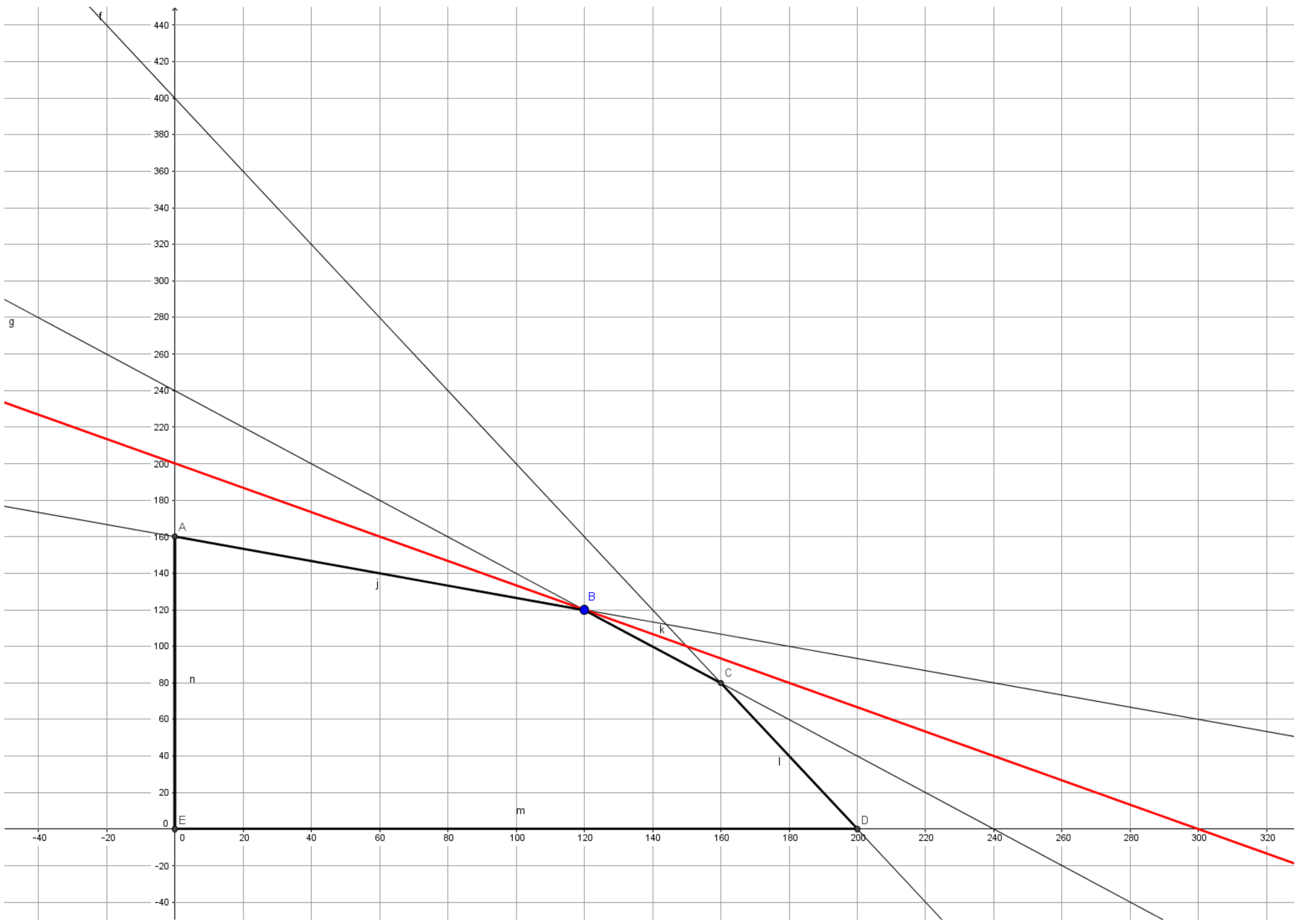
	Produkt A	Produkt B	Kapazität in Minuten
Maschine 1	6	3	1.200
Maschine 2	3	3	720
Maschine 3	3	9	1.440

Verkaufspreis Produkt A: 200,00 € Verkaufspreis Produkt B: 300,00 €

Gesucht ist das umsatzmaximierende Produktionsprogramm.

a) Bestimmen Sie graphisch das Erlösmaximum.

Lösung:



b) Lösen Sie das Optimierungsproblem mithilfe des Simplexverfahrens.

Lösung:

$$\begin{array}{l|ccccc|l} & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\ i & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1.200 \\ ii & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 720 \\ iii & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 & 1.440 \\ \hline ZF & -200 & -300 & 0 & 0 & 0 & G \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{9}\cdot iii}$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l} & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\ i & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1.200 \\ ii & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 720 \\ iii & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 160 \\ \hline ZF & -200 & -300 & 0 & 0 & 0 & G \end{array} \xrightarrow{\substack{i-3\cdot iii \\ ii-3\cdot iii \\ Z+300\cdot iii}}$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l} & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\ i & 5 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 720 \\ ii & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 240 \\ iii & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 160 \\ \hline ZF & -100 & 0 & 0 & 0 & \frac{100}{3} & G+48.000 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot ii}$$

$$\begin{array}{l|cccccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & & b \\
i & 5 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & & 720 \\
ii & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & & 120 \\
iii & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & & 160 \\
\hline
ZF & -100 & 0 & 0 & 0 & \frac{100}{3} & & G+48.000
\end{array}
\xrightarrow[\;Z+100\cdot ii\;]{\substack{i-5\cdot ii \\ iii-\frac{1}{3}\cdot ii}}$$

$$\begin{array}{l|ccccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\
i & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 120 \\
ii & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 120 \\
iii & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 160 \\
\hline
ZF & 0 & 0 & 0 & 50 & \frac{50}{3} & G+60.000
\end{array}$$

$$Lösung: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix} \quad mit \quad Gesamtgewinn: 60.000$$

(4) Deskriptive Statistik I: Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße / Konzentrationsprozess

Im Frachthafen Mannheim werden im Laufe eines Monats mehrere Frachtschiffe beladen. Die Größe der Schiffe wird durch ihre Ladekapazität (in Tonnen) angegeben. Im Laufe des Monats Mai werden die in der Tabelle angegebenen Werte ermittelt, wobei eine Klasseneinteilung gewählt wird.
Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

Gewicht (to)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufig-keitsdichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 1000[	20					
[1000 ; 2.000[	80					
[2.000 ; 4.000[	100					
[4.000 ; 8.000[	70					
[8.000 ; 15.000[	30					
Summe						

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

Lösung:

Gewicht (to)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufig-keitsdichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 1000[	20	$^2/_{30}$	500	1.000	$^2/_{100}$ = 0,02	$^2/_{30}$ = 0,067
[1000 ; 2.000[	80	$^8/_{30}$	1.500	1.000	$^8/_{100}$ = 0,08	$^{10}/_{30}$ = 0,33
[2.000 ; 4.000[	100	$^{10}/_{30}$	3.000	2.000	$^1/_{20}$ = 0,05	$^{20}/_{30}$ = 0,67
[4.000 ; 8.000[	70	$^7/_{30}$	6.000	4.000	$^7/_{400}$ = 0,0175	$^{27}/_{30}$ = 0,9
[8.000 ; 15.000[	30	$^3/_{30}$	11.500	7.000	$^3/_{700}$ = 0,0043	1
Summe	300	1	---	15.000	---	---

b) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.

Lösung: artihmetischer Mittelwert: $\bar{x} = 3.983,33$

modale Klasse [1.000 ; 2.000[wegen HD_{max} => $x_{Mod} = 1.500$

c) Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.

Lösung:

$$\overline{x_M} = 2.000 + \frac{2.000 \cdot \left(0,5 - \frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 3.000$$

$$\overline{q_1} = 1.000 + \frac{1.000 \cdot \left(0,25 - \frac{1}{15}\right)}{\frac{4}{15}} = 1.687,5$$

$$\overline{q_3} = 4.000 + \frac{4.000 \cdot \left(0,75 - \frac{2}{3}\right)}{\frac{7}{30}} = 5.428,57$$

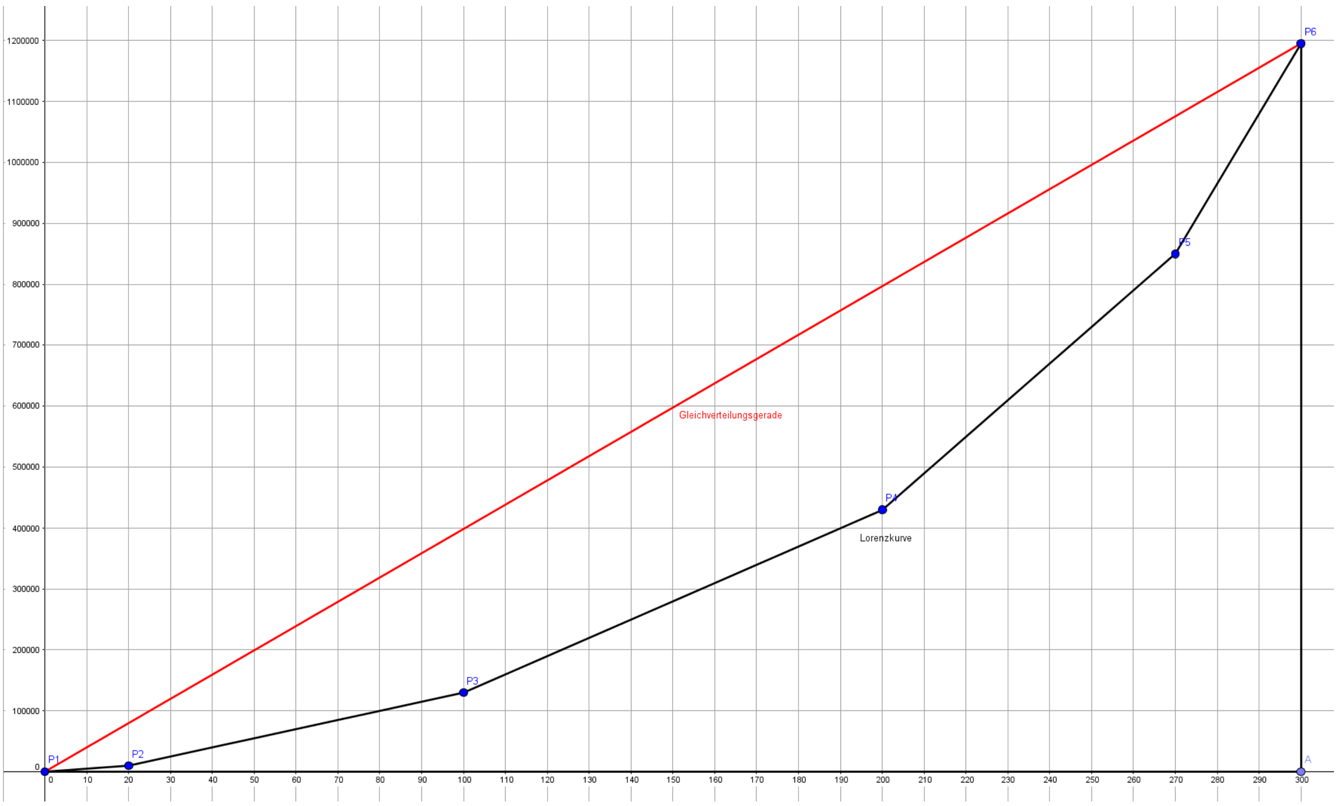
d) Zeichnen Sie die Lorenzkurve.

Lösung:

Koordinaten für die Lorenzkurve:

$P_1(0 \mid 0)$ $P_2(20 \mid 10.000)$ $P_3(100 \mid 130.000)$

$P_4(200 \mid 430.000)$ $P_5(270 \mid 850.000)$ $P_6(300 \mid 1.195.000)$



(5) Deskriptive Statistik II: Korrelations- & Regressionsanalyse

Teil 1:

In einem Labor wurde für 13 Stahlstäbe gleicher Länge und gleichen Querschnitts, aber unterschiedlichen Kohlenstoffgehalts, die Zugfestigkeit s gemessen.

Es ergab sich nebenstehendes Messergebnis:

C-Gehalt (in%)	Zugfestigkeit in N/mm²
0,10	35,80
0,30	52,20
0,15	40,00
0,60	84,90
0,70	88,50
0,20	43,40
0,50	72,10
0,20	44,50
0,30	56,80
0,15	38,70
0,55	78,30
0,60	82,20
0,20	41,10

a) Ermitteln Sie die zugehörige Regressionsgerade s(C).

b) Wie hoch ist die voraussichtlich Zugfestigkeit bei einem C-Gehalt von 0,9 %?

c) Welcher C-Gehalt muss vorliegen, wenn eine Zugfestigkeit 150 N/mm^2 gewünscht wird?

d) Berechnen Sie den zugehörigen Korrelationskoeffizient nach Pearson.

Lösungen:

a) Regressionsgerade: $y = 25{,}19 + 94{,}73x$

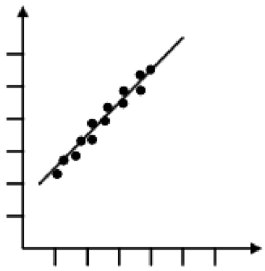
b) $y = 25{,}19 + 94{,}73 \cdot 0{,}9 \rightarrow y = 110{,}45$

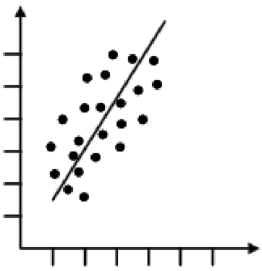
c) $150 = 25{,}19 + 94{,}73 \cdot x \rightarrow x = 1{,}3175\,[\%]$

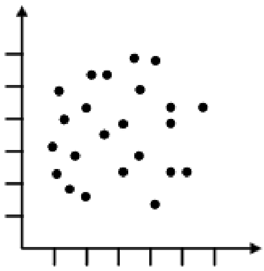
d) enge positive Korrelation: $r = 0{,}9955$

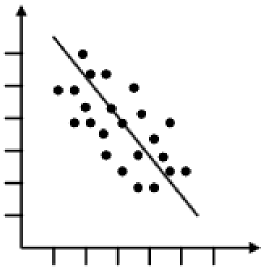
Teil 2:

Beschreiben Sie die Korrelationsdiagramme und schätzen Sie den Korrelationskoeffizienten ab.

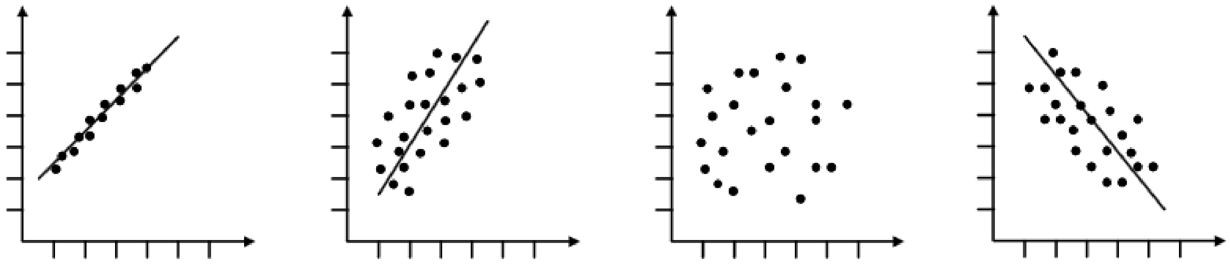








Lösung:



Starke Korrelation **K = 1** | SchwacheKorrelation **K = 0,5** | Keine Korrelation **K = 0** | Schw. neg. Korrelation **K = - 0,5**

Die Korrelationszahl

Je stärker die Korrelation zweier Merkmale ist, desto eher kann auch ein ursächlicher Zusammenhang vorliegen. Deshalb ist es wichtig, diese Stärke der Korrelation in einer Ziffer auszudrücken. Dies ist die **Korrelationszahl K.**
Sie kann maximal 1 betragen. Ihre Berechnung ist kompliziert, aber nicht schwierig.
Damit steht eine Kennzahl zur Verfügung, die die Güte angibt, in der die Merkmale einer festen Beziehung folgen.

Teil 3:

Bei Teilnehmern eines Marathons wurden neben der Platzierung auch das Körpergewicht erfasst:

Person	1	2	3	4	5
Platzierung	4	1	3	2	5
Gewicht	83	82	48	62	45

Berechnen Sie den Rang-Korrelationsvergleich nach Spearman und interpretieren Sie Ihr Ergebnis bzw. den Zusammenhang.

Lösung:

$$\left.\begin{array}{l|ccccc} \text{Rangfolge Platz} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{Rangfolge Gewicht} & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ \text{d (Differenz)} & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ \text{d}^2 & 1 & 1 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right\} \quad r_S = 1-\frac{6\cdot 12}{5\cdot 24} = 0{,}4$$

⇨ Gewicht und Platzierung besitzen eine sehr schwache positive Korrelation.