## Klausur Wirtschaftsmathematik

## Fakultät für Technik

## **Studiengang**: Mechatronik                    Datum: 19.06.2019

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Matrikelnummer:** | | **Dozent: Jürgen Meisel** | |
| **Kurs: TMT17 EN2** | **Semester:** 4 | | |
| **Hilfsmittel:** | | **Bearbeitungszeit: 120 min.** | |
| **Bewertung:** | Maximale Punktzahl: 100 | Erreichte Punktzahl: | |
| **Prozente:** | ................ | Signum: ................ | |
| **Anmerkungen:** | | | |

| **Aufgabennr.:** | | **maximale Punkte** | **erreichte Punkte** | **Bemerkungen** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | | **12** | | |
| **2** | | | | |
| **Teil 1** | | **10** | | |
| **Teil 2** | | **12** | | |
| **3** | | | | |
| **Teil 1** | | **8** | | |
| **Teil 2** | | **8** | | |
| **Teil 3** | | **10** | | |
| **4** | | **12** | | |
| **5** | | **18** | | |
| **6** | | **10** | | |
| **Summe** | | **100** | | |

## (1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

Der Markt von Tablet-PCs wird im Wesentlichen von drei Herstellern A, S und M beherrscht.
Nach einem Jahr bleiben 65% der Kunden von A dem Hersteller treu,15% der Kunden wechseln zum Hersteller M und 20% wechseln zum Hersteller S.
Dem Hersteller M bleiben 50% treu, 30% wechseln zum Hersteller A und 20% wechseln zum Hersteller S.
Dagegen bleiben 40% dem Hersteller S treu, 20% wechseln zu M und 40% wechseln zum Hersteller A.

Im Jahr 2018 konnte man folgendes Verteilungsverhältnis feststellen:

A: S : M entspricht 2 : 3 : 5

a) Erstellen Sie die Übergangsmatrix.

b) Welche Anteile sind 2019 zu erwarten?

c) Können mit diesen Daten die Anteile im Jahr 2017 berechnet werden?

d) Der Hersteller A kann nur am Markt rentabel existieren, wenn langfristig ein Anteil von ca. 45 % erreicht werden kann.
Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

## (2) Simplexalgorithmus: Lineare Optimierung

**Teil 1:**

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & 2x+2y & \leq & 16 \\
(2) & 4x+2y & \leq & 24 \\
(3) & 4x+6y & \leq & 44 \\
\hline
ZF & f(x,y) & = & 80x+60y \rightarrow \max.
\end{array}
$$

**Teil 2:**

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & 2x+y & \geq & 12 \\
(2) & x+2y & \geq & 12 \\
(3) & x+y & \geq & 10 \\
(4) & 3x+4y & \geq & 40 \\
\hline
ZF & f(x,y) & = & 11x+8y \rightarrow \min.
\end{array}
$$

Erstellen Sie für die Aufgaben in Teil 1 und Teil 2 jeweils **die graphische *und* die analytische Lösung**.

⇨ ***Anmerkung: Sie können für die beiden graphischen Lösungen die Koordinatensysteme im Anhang 1 verwenden.***

## (3) Differentialrechnung: Extrema ohne und mit Nebenbedingungen

### Teil 1: Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und
berechnen Sie die Extremwerte.

Warum ist der Funktionswert des Maximums kleiner als der Funktionswert
des Minimums?

### Teil 2: Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{-x^2 - y^2}$
Eine Untersuchung dieser Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft muss nicht erfolgen!

### Teil 3: Optimum mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion:

$$f(x,y) = 2x^{0,6} \cdot y^{0,4}$$

Die Mengeneinheit für x kostet 8,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt
bei 6,50 €. Insgesamt stehen uns 16.250,00 € zur Verfügung.
Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.
b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

## (4) Regression & Korrelation

Zwischen dem Hopfenpreis in € je Handelseinheit und dem Bierpreis in Cent je Liter
bestehe folgender Zusammenhang:

| Hopfenpreis | 6 | 8 | 5 | 7 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Bierpreis | 120 | 150 | 125 | 145 | 110 |

a) Bestimmen Sie die lineare Regressionsfunktion für den Bierpreis bei gegebenem Hopfenpreis.
b) Welcher Bierpreis ist bei einem Hopfenpreis von 6,50 zu erwarten?
c) Welcher Hopfenpreis muss bei einem Bierpreis von 250 vorgelegen haben?
d) Bestimmen Sieden Korrelationskoeffizient nach Brevais-Pearson?

e) Das Unternehmen möchte nach China expandieren:

Wie würden sich die Werte der Regressionsgeraden und des Korrelationskoeffizienten ändern, wenn man nun auf Basis der chinesischen Währung rechnete?

⇨ *Wechselkurs: 0,15 € entspricht 1,00 Yuan Renminbi*

## (5) Mittelwerte und Streumaße - klassiert

Bei der letzten Mathematikklausur wurden folgende Ergebnisse festgestellt:

| Punkte: | $0 \leq x < 20$ | $20 \leq x < 35$ | $35 \leq x < 50$ | $50 \leq x < 75$ | $75 \leq x \leq 100$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl Studenten | **2** | **10** | **14** | **36** | **18** |

a) Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm

b) Bestimmen Sie den Modus.

c) Wie hoch ist die Durchschnittspunktzahl und wie groß ist die Standardabweichung?

d) Wie hoch sind der Median und beiden Quartile?

## (6) Ginikoeffizient und Lorenzkurve

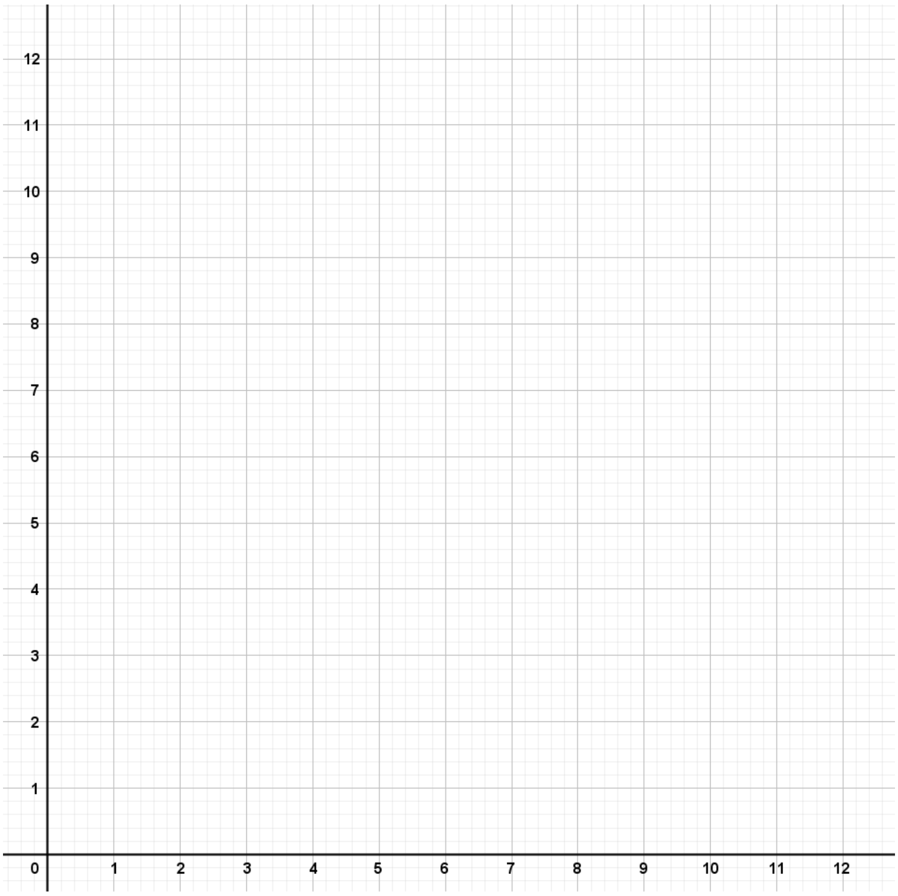
Die 20 bestplatzierten Tennisspieler der ATP-Weltrangliste haben im April 10 Mio. € erhalten. Hinsichtlich der Lorenzkurve (LK), welche die Preisgeldkonzentration darstellt, sind aber leider nur die Steigungen in drei der vier Klassen bekannt.

| Klasse | Anzahl Spieler | Summe Spieler | Gewinn je Spieler | Summe Gewinn | Steigung LK |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | | | | 0,25 |
| 2 | 4 | | | | 1,00 |
| 3 | | | | | 1,50 |
| 4 | 4 | | | | |
| Summe | | --- | --- | --- | --- |

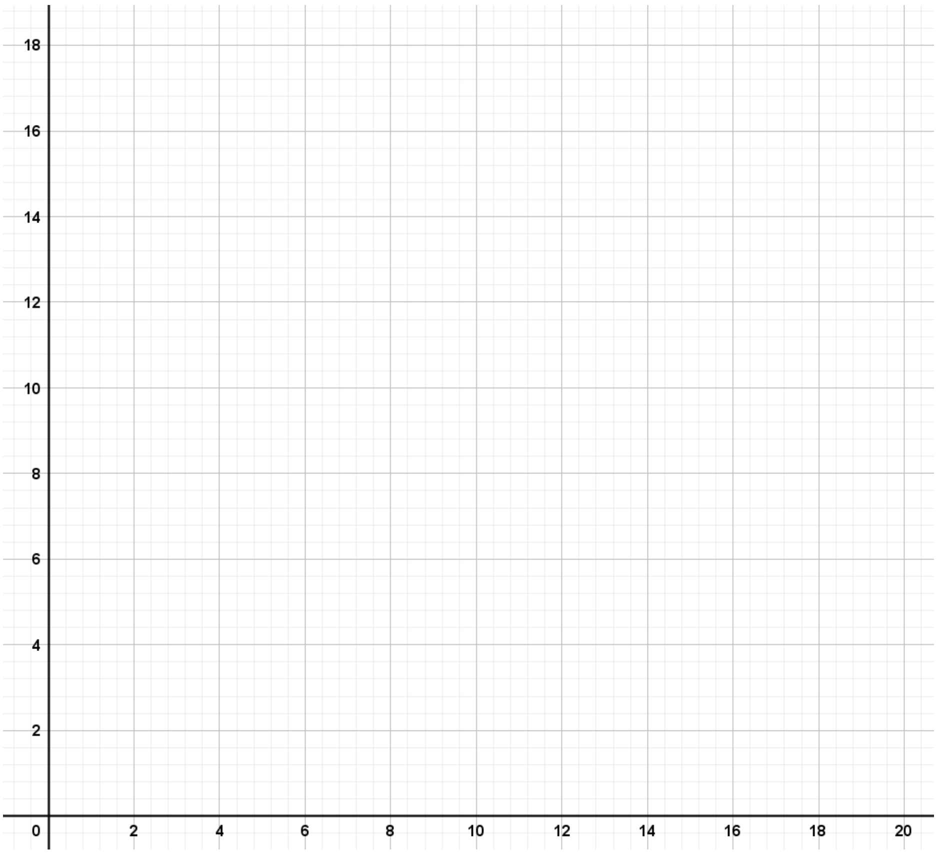
Vervollständigen Sie die Tabelle mit den insgesamt vier Gruppen von Tennisspielern, Zeichnen Sie die zugehörige Lorenzkurve und berechnen Sie den Ginikoeffizient.

## Anhang 1: Koordinatensysteme zu Aufgabe 2

### Teil 1:




### Teil 2:



**Formeln Statistik:**

**Lageparameter und Streumaße:**

**Teil 1: Diskrete Merkmalsdarstellung (Einzelwerte)**

**Einfaches arithmetisches Mittel:** $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \left[ oder \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right]$

**Gewogenes arithmetisches Mittel:** $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i \cdot n_i)}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i \cdot n_i) = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i \cdot \frac{n_i}{n}\right)$

**Varianz:** $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \mu^2$

**Varianz bei Häufigkeitsverteilung:** $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2 \cdot n_i$

**Standardabweichung:** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

**Median (Zentralwert):**

$$\overline{x_M} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{für n ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{für n gerade} \end{cases}$$

**Quantile/Quartile:**

$$\overline{x_p} = \begin{cases} x_{[n\cdot p]+1} & \text{für } (\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}) \text{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2}\left(x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}\right) & \text{für } (\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}) \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$

***Modus: Häufigster Wert einer Verteilung.***

**Teil 2: Klassierte Merkmalsausprägungen**

**Arithmetisches Mittel bei klassierten Merkmalsausprägungen:**

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left[(x_i)_m \cdot n_i\right] = \sum_{i=1}^{k}\left[(x_i)_m \cdot \frac{n_i}{n}\right] \quad \textit{mit } (x_i)_m \textit{ als Klassenmitte der Klasse i}$$

**Modus / Modalwert:**

- ⇨ **Modale Klasse: Klasse mit max. Häufigkeitsdichte**
- ⇨ **Modus / Modalwert: Wert der Klassenmitte der modalen Klasse**

**Median und Quartile:**

Median (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,5} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,5} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}5 - F(a))}{p_i}$

unteres Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,25} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,25} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}25 - F(a))}{p_i}$

oberes Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,75} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,75} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}75 - F(a))}{p_i}$

**Anmerkungen:**

Prozentanteile: $p_i \cdot 100\,\%$

Klassenmitten: $c_i =$ (Intervalluntergrenze + Intervallobergrenze) / 2

Klassenbreiten: $\Delta_i =$ Intervallobergrenze – Intervalluntergrenze

Histogrammhöhen: $h_i = \frac{p_i \cdot 100\,\%}{\Delta_i}$ bei Normierung auf 100 %

kumulierte relative Häufigkeit an der Stelle a: F(a)

---

**Gini-Koeffizient:** *Berechung der Flächen mit relativen kumulierten Häufigkeiten*

$$Gini = \frac{\text{Konzentrationsfläche K}}{\text{maximale Konzentrationsfläche K}_{\max}}$$

Anmerkung: Als *„Konzentrationsfläche" K* bezeichnet man die Fläche, zwischen der Gleichverteilungsdiagonalen und der LORENZ-Kurve: $0 \leq K \leq 1/2$ .

***Der Wertebereich des Gini-Koeffizienten liegt zwischen 0 (= Gleichverteilung) und 1 (= vollständige Konzentration auf einen Merkmalsträger).***

---

**Lineare Regression und Korrelation**

**Ansatz:** $y = b_0 + b_1 x \qquad \mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \mu_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

$$b_1 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n \cdot \mu_x \cdot \mu_y}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - n \cdot \mu_x^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \mu_x \cdot \mu_y}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - \mu_x^2}$$

$$b_0 = \mu_y - b_1 \cdot \mu_x$$

**Korrelation nach Brevais-Pearson:**

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)\cdot(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n \cdot \mu_x \cdot \mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - n \cdot \mu_x^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i^2) - n \cdot \mu_y^2}}$$