Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Technik

Studiengang: Mechatronik Datum: 07.12.2020

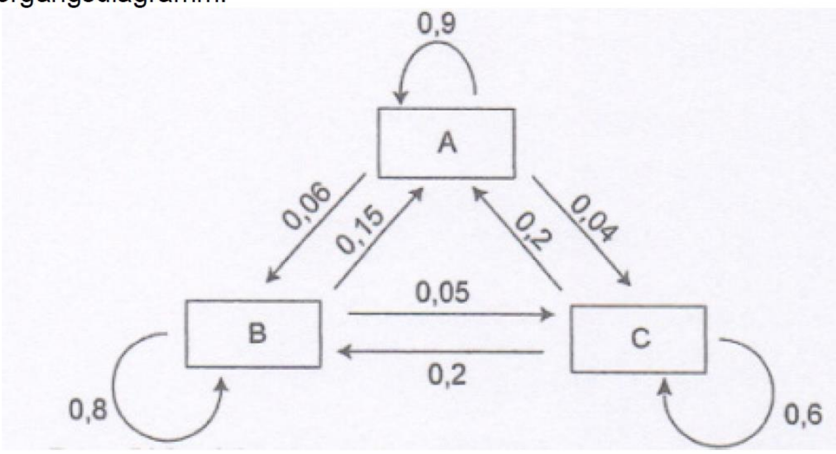
Matrikelnummer:			**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: TMT18 EN2	**Semester:**	4/5		
Hilfsmittel: ***Wiss. TR (nicht programmierbar) und Formelsammlung***			**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 60		Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....		Signum:	
Anmerkungen:	***Von 6 gestellten Aufgaben müssen 5 ausgewählt und bearbeitet werden.***			

Aufgabennr.:	maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
A 1: Übergangsmatrizen und stat. Gleichgewicht	12		
A 2: Leontief-Modell	12		
A 3: Diff.-Rg I Extrema ohne NB	12		
A 4: Diff.-Rg II Extrema mit NB	12		
A 5: Statistik I Mittelwerte & Streumaße	12		
A 6: Statistik II Lorenzkurve & Gini-Koeffizient	12		
Summe	60		

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

In den Skigebieten (A)lberg, (B)orgio und (C)heveau verbringen jährlich regelmäßig 200 000 Gäste ihren Skiurlaub. Allerdings gibt es natürlich Veränderungen der Gästeverteilung auf die drei Skigebiete von einem zum nächsten Jahr, die einem Übergangsdiagramm modellhaft dargestellt werden kann:

Übergangsdiagramm:



Im Jahr 2017 konnte man folgendes Verteilungsverhältnis feststellen: A: B : C entspricht 6 : 3 : 1

a) Erstellen Sie die Übergangsmatrix U(A, B, C).

b) Welche Anteile sind 2018 zu erwarten?

c) Ermitteln Sie die Anteile in der Skisaison vor 2017.

d) Das Skigebiet Borgio kann langfristig nur am Markt rentabel existieren, wenn mind. 50.000 Gäste jedes Jahr die Region besuchen.
Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{p}_{2017} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz: \quad \vec{p}_{2018} = U \cdot \vec{p}_{2017}$$

$$\rightarrow \quad \vec{p}_{2018} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,605 \\ 0,296 \\ 0,099 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz: \quad \vec{p}_{2017} = U \cdot \vec{p}_{2016}$$

$$\xrightarrow{LGS} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 35 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,31 \\ 0,10 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz: \quad U \cdot \vec{x} = \vec{x} \rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\xrightarrow{LGS} \begin{pmatrix} -0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & -0,2 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & -0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{11} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 32 \\ 11 \end{pmatrix} mit\ \lambda \in \Re$$

$$\xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{113} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 32 \\ 11 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,6195 \\ 0,2832 \\ 0,0973 \end{pmatrix}$$

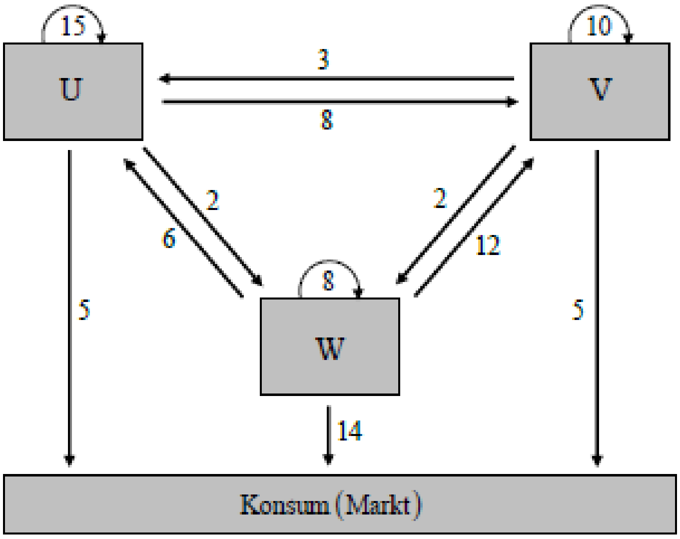
$$\rightarrow \quad 0,2832 \cdot 200.000 = 56.640 > 50.000 \quad [Bedingung\ erfüllt]$$

Direkte Lösung für statische Verteilung:

$$\begin{pmatrix} -0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & -0,2 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & -0,4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{113} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 32 \\ 11 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,6195 \\ 0,2832 \\ 0,0973 \end{pmatrix}$$

(2) Lineare Algebra / Arbeit mit Matrizen: Leontief-Modell

Die Verflechtung dreier Teilbetriebe eines Energieversorgers und mit dem Markt können mittels folgendem Leontief-Modell dargestellt werden.



a) Bestimmen Sie die Verflechtungsmatrix A und den Vektor $\vec{x}$ der Gesamtproduktion.

b) Ermitteln Sie den neuen Vektor $\vec{x}$ der Gesamtproduktion, wenn sich der Marktvektor zu $\vec{y} = (4{,}5 \mid 1{,}5 \mid 14)^T$ geändert hat

Lösung: **Gesamt-Verflechtung**

Output →

Input

	U	V	W	$Markt\ y_i$	$Gesamt\ x_i$
U	15	8	2	5	30
V	3	10	2	5	20
W	6	12	8	14	40

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{15}{30} & \frac{8}{20} & \frac{2}{40} \\ \frac{3}{30} & \frac{10}{20} & \frac{2}{40} \\ \frac{6}{30} & \frac{12}{20} & \frac{8}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix} = T$$

$$\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}05 \\ -0{,}1 & 0{,}5 & -0{,}05 \\ -0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 370 & 350 & 45 \\ 90 & 390 & 30 \\ 160 & 380 & 210 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

(3) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingung(en)

Gegeben sie die Funktion $f(x,y,z) \;=\; \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}y^3 - 4y^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}z - 6\right)^2$

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion
und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie die Extremwerte.

Lösung:

$$f(x,y,z) \;=\; \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}y^3 - 4y^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}z - 6\right)^2$$

$$f(x,y,z) \;=\; x - 2 \;=\; 0 \;\rightarrow\; x = 2$$

$$f(x,y,z) \;=\; y^2 - 8y \;=\; (y-8)y \;=\; 0 \;\rightarrow\; y_1 = 0 \;\vee\; y_2 = 8$$

$$f(x,y,z) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}z - 6\right)\cdot\frac{3}{2} \;=\; \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}z - 6\right) \;=\; 0 \;\rightarrow\; z = 4$$

$$S_1(2 \mid 0 \mid 4 \mid f_1) \;\vee\; S_2(2 \mid 8 \mid 4 \mid f_2)$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y-8 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}125 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1} H(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}125 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \det(H_1) = \det(1) = 1 > 0 \\ \det(H_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -8 < 0 \\ \rightarrow indefinit \quad \rightarrow Sattelpunkt \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{S_2} H(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}125 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \det(H_1) = \det(1) = 1 > 0 \\ \det(H_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 > 0 \\ \det(H_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}125 \end{pmatrix} = 9 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} positiv\ definit \\ Min\left(2 \,\middle|\, 8 \,\middle|\, 4 \,\middle|\, -\frac{262}{3}\right) \end{array}$$

(4) **Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingung(en)**

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y)=2x^{0,7}\cdot y^{0,3}$

Eine Mengeneinheit für x kostet 10,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 2,00 €. Insgesamt steht ein Budget von b GE zur Verfügung.

a) Wie hoch muss das Budget b sein, damit man unter den gegebenen Bedingungen im Maximum die Produktionszahlen x = 1.400 erhält?

b) Ermitteln Sie dann auch den Wert für y (im Maximum).

c) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um 100 GE erhöht?

Lösung:

$$f(x,y) = 2x^{0,7}\cdot y^{0,3}$$
$$L(x,y,\lambda) = 2x^{0,7}\cdot y^{0,3}+\lambda\cdot(b-10x-2y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) = 1,4\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}-10\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=\frac{1,4}{10}\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}$$
$$L_y(x,y,\lambda) = 0,6\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}-2\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=\frac{0,6}{2}\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}$$
$$0,14\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}=0,3\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}} \quad\rightarrow\quad y = \frac{30}{14}x = \frac{15}{7}x$$
$$L_\lambda(x,y,\lambda) = b-10x-2y=0 \quad\rightarrow\quad b(x,y)=10x+2y$$
$$\xrightarrow{y\ =\ \frac{15}{7}x} \quad b(x)=10x+2\cdot\frac{15}{7}x$$
$$\rightarrow\quad b(x)=\frac{100}{7}x \quad\xrightarrow{x=1.400}\quad b(1.400)=\frac{100}{7}\cdot 1.400=20.000$$
$$\xrightarrow{y\ =\ \frac{15}{7}x} \quad y=3.000$$

$$f(1.400/3.000) = 2\cdot 1.400^{0,7}\cdot 3.000^{0,3} \approx 3.519,30 \quad oder$$
$$f\left(1.400/\frac{15}{7}\cdot 1.400\right) = 2\cdot 1.400^{0,7}\cdot\left(\frac{15}{7}\cdot 1.400\right)^{0,3} = 2\cdot\left(\frac{15}{7}\right)^{0,3}\cdot 1.400 \approx 3.519,30$$

Wert für λ

$$\lambda=0,14\cdot\left(\frac{15}{7}\right)^{0,3}=0,175965$$

Erhöhung Budget um 100 GE: $20.100\,[\text{Budget}(\text{neu})]$

$\rightarrow\quad 100\cdot 0,175965 = 17,5965 \approx 17,60$

$\rightarrow$ Erhöhung des Produktionsergebnisses auf 3.536,90

Nachweis:

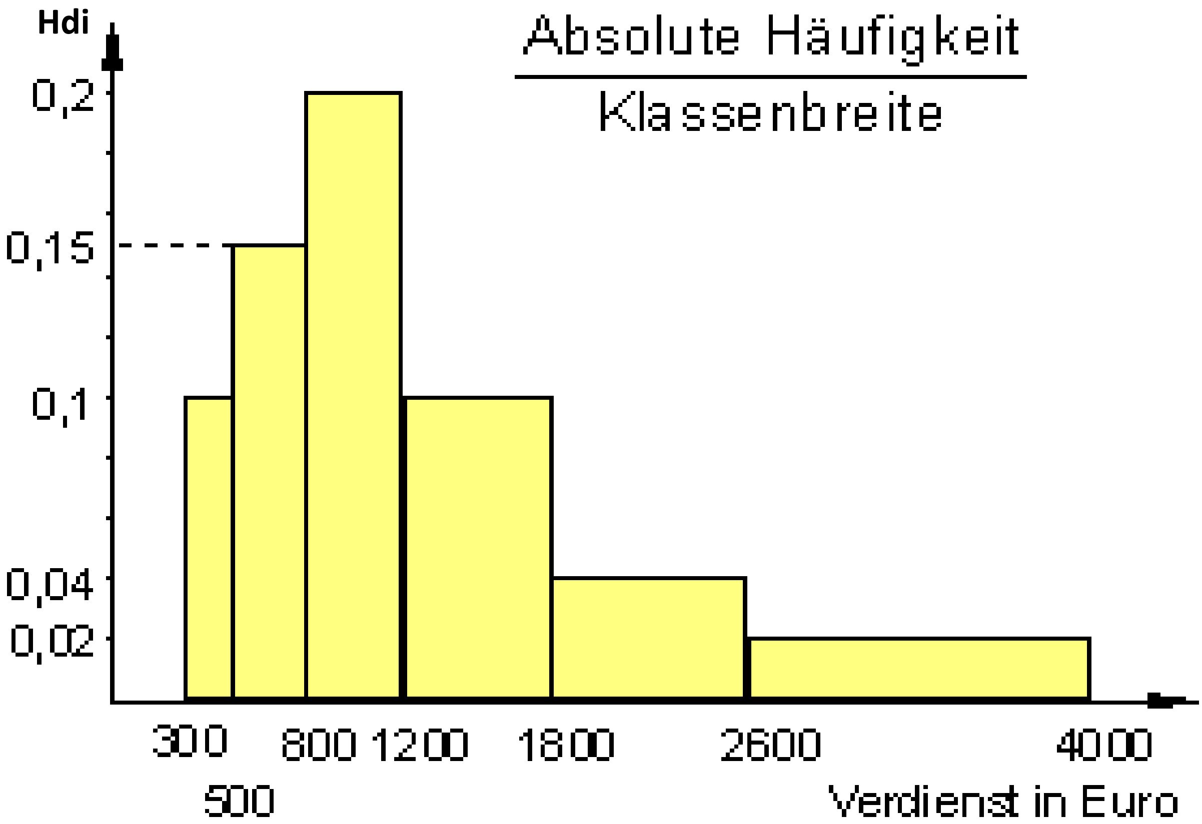
$$20.100=\frac{100}{7}x \quad\rightarrow\quad 1.407=x \quad\xrightarrow{y\ =\ \frac{15}{7}x}\quad y=3.015$$
$$f(1.407/3.015) = 2\cdot 1.407^{0,7}\cdot 3.015^{0,3} \approx 3.536,90 \quad oder$$
$$f\left(1.407/\frac{15}{7}\cdot 1.407\right) = 2\cdot 1.407^{0,7}\cdot\left(\frac{15}{7}\cdot 1.407\right)^{0,3} = 2\cdot\left(\frac{15}{7}\right)^{0,3}\cdot 1.407 \approx 3.536,90$$

Unterschied: $3.536,90-3.519,30 = 17,60$

(5) Mittelwerte und Streumaße - klassiert

Das Histogramm beschreibt die Verteilung der Beschäftigten eines Industriezweigs nach ihrem Monatsverdienst.

a) Erstellen Sie die zugehörige Häufigkeitstabelle (=> Anlage unten)
b) Wie groß ist der Durchschnittsverdienst eines Beschäftigten?
c) Ermitteln Sie den Modus.
d) Wie lauten Median und die beiden Quartile?



Anlage zur Häufigkeitstabelle:

Klassen	Anzahl	p_i	Σp_i	Klassen-breite	Klassen-mitte	Hdi
Summe			---		---	---

Lösung:

Klassen	Anzahl	pi	Σ πι	Klassen-breite	Klassen-mitte	Hdi
[300 ; 500[	20	0,075	0,075	200	400	0,1
[500 ; 800[	45	0,170	0,245	300	650	0,15
[800 ; 1.200[	80	0,302	0,547	400	1000	0,2
[1.200 ; 1.800[	60	0,226	0,774	600	1500	0,1
[1.800 ; 2.600[	32	0,121	0,894	800	2200	0,04
[2.600 ; 4.000]	28	0,106	1,000	1400	3300	0,02
Summe	265	1	---	3700	---	---

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(x_i\right)_m \cdot \frac{n_i}{n}\right] = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(x_i\right)_m \cdot p_i\right] \rightarrow \overline{x} = 1.396,42$

$mit \left(x_i\right)_m \; als\ Klassenmitte\ der\ Klasse\ i$

Median: $\overline{x_M} \Rightarrow \overline{x_{0,5}} = [800;1.200] \rightarrow \overline{x_{0,5}} = 800 + \frac{400\cdot[0,5-0,245]}{0,302} = 1.137,50$

Quartile:

$q_1 \Rightarrow \overline{x_{0,25}} = [800;1.200] \rightarrow \overline{x_{0,25}} = 800 + \frac{400\cdot[0,25-0,245]}{0,302} = 806,25$

$q_3 \Rightarrow \overline{x_{0,75}} = [1.200;1.800] \rightarrow \overline{x_{0,75}} = 1.200 + \frac{600\cdot[0,75-0,547]}{0,226} = 1.737,50$

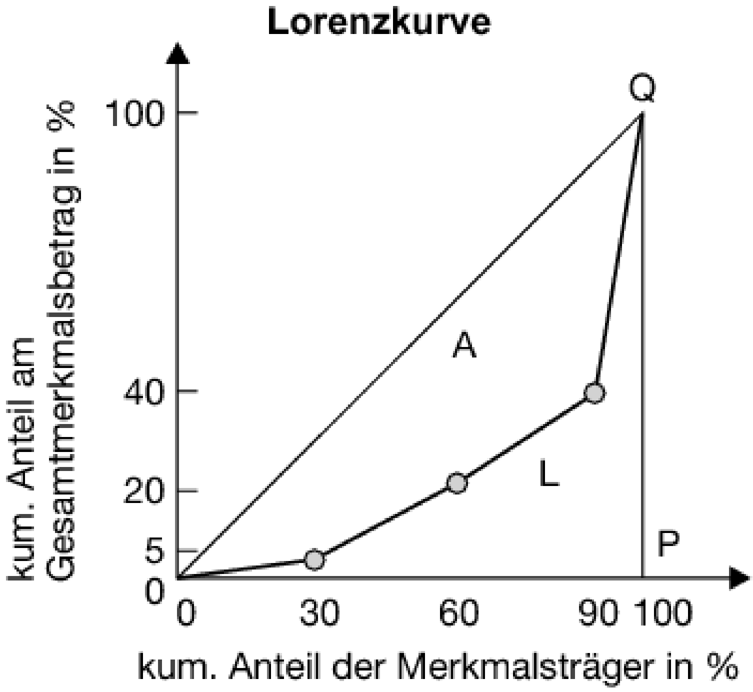
Modus/Modalwert:

Schritt 1: Modale Klasse bestimmen => Klasse mit max. Häufigkeitsdichte: [800 ; 1.200[

Schritt 2: Wert der Klassenmitte der modalen Klasse => Klassenmitte: 1.000

(6) **Ginikoeffizient und Lorenzkurve**

Teil A: Ermitteln Sie den Ginikoeffizient aus nachfolgender Lorenzkurve.



Lösung:

$$Gini(GK) = \frac{0,5-0,205}{0,5}$$

$$Gini(GK) = \frac{0,295}{0,5} = 0,59$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\cdot 0,3\cdot 0,05 = 0,0075\\
A_2 &= \frac{1}{2}\cdot(0,05+0,2)\cdot 0,3 = 0,0375\\
A_3 &= \frac{1}{2}\cdot(0,2+0,4)\cdot 0,3 = 0,09\\
A_4 &= \frac{1}{2}\cdot(0,4+1,0)\cdot 0,1 = 0,07
\end{aligned}\right\} A_1+A_2+A_3+A_4 = 0,205$$

Teil B: Sei die Konzentration auf einem Produktmarkt mit **5 Anbietern** wie folgt:
3 Anbieter besitzen je 5% Marktanteil, ein Anbieter 15% und einer 70% Marktanteil. Der gesamte Umsatz betrage 10 Mrd. €.
Stellen Sie die zugehörige Lorenzkurve auf und ermitteln Sie den Ginikoeffizient.

Lösung:

Die Punkte für die Lorenzkurve lauten: $P_1(0/0)$ $P_2(0{,}6/0{,}15)$ $P_3(0{,}8/0{,}3)$ $P_4(1/1)$

Kumulierter Anbieteranteil: X Kumulierter Marktanteil: Y

$$Gini(GK) = \frac{0{,}5-0{,}22}{0{,}5} = \frac{0{,}28}{0{,}5} = 0{,}56$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\cdot 0{,}6\cdot 0{,}15 = 0{,}045 \\ A_2 &= \frac{1}{2}\cdot(0{,}15+0{,}3)\cdot 0{,}2 = 0{,}045 \\ A_3 &= \frac{1}{2}\cdot(0{,}3+1{,}0)\cdot 0{,}2 = 0{,}13 \end{aligned}\right\} \quad A_1+A_2+A_3 = 0{,}22$$