Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Technik

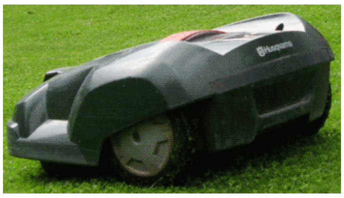
Studiengang: Integrated Engineering Datum: 12.06.2023

Matrikelnummer:				**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: TIE 21 EN		**Semester:**	4		
Hilfsmittel: ***Wiss. TR (nicht programmierbar) und Formelsammlung***				**Bearbeitungszeit: 90 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 90			Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....			Signum:	
Anmerkungen:	***Von 8 gestellten Aufgaben müssen 6 ausgewählt und bearbeitet werden.***				

Aufgabennummer		maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
A 1: Übergangsmatrizen und stat. Gleichgewicht		**15**		
A 2: Diff.-Rg I (Extrema mit NB)		**15**		
A 3: Diff.-Rg II (Extrema ohne NB)		**15**		
A 4: Leontief-Modell		**15**		
A 5: Lineare Optimierung		**15**		
A 6: Statistik I - Mittelwerte & Streumaße (diskret)		**15**		
A 7: Statistik II - Mittelwerte & Streumaße (stetig – klassiert)		**15**		
A 8: Statistik III - Gini-Koeffizient / Lorenzkurve & Preisindex		**15**		
Summe		**90**		

Klausur QR-Methoden (12.06.2023)

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht



Das Unternehmen MÄH-ROB GmbH produziert u.a. verschiedene Typen von Mährobotern.
Bisher war die MÄH-ROB GmbH nur im Bereich Norddeutschland als Anbieter auf dem Markt und möchte ihr Geschäftsfeld auf den Vorderpfälzer Bereich erweitern. Natürlich befindet man sich in Konkurrenz zu anderen Unternehmen und hat auf der Basis von Marktuntersuchungen folgendes Wechselverhalten im Turnus von drei Jahren ermitteln lassen:

a) Erstellen Sie aufgrund der **Inversen Matrix U^{-1}** die ***Übergangsmatrix* U**

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -2,4 & 9,6 & -0,4 \\ 6,2 & -9,8 & 0,2 \\ -2,8 & 1,2 & 1,2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,05 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Probe: $U \cdot U^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Die aktuellen Marktanteile belaufen sich auf: (A)alkauf: **2a** (B)ragdiger: **3a** (M)ÄH-ROB: **0**
Bestimmen Sie daraus den Verteilungsvektor $\overrightarrow{p_0}$ **und** den Wert für **a** bei **insgesamt 2.000** Kunden.

Lösung: $\overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5a=2.000} \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1.200 \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit\ a = 400$

c) Mit welchen Marktanteilen ist in 3 $\left(\hat{=}\ \overrightarrow{p_1}\right)$ bzw. 6 $\left(\hat{=}\ \overrightarrow{p_2}\right)$ Jahren bei dem angenommenen Wechselverhalten zu rechnen?

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \quad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,05 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,14 \\ 0,56 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p_1}$$

Lösung:

$$U^2 \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_2} \quad oder \quad U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \quad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,05 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,14 \\ 0,56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,16 \\ 0,102 \\ 0,738 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p_2}$$

d) Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{p_{-1}}$ und kommentieren Sie das Ergebnis kritisch.

Lösung:

$$U \cdot \overrightarrow{p_{-1}} = \overrightarrow{p_0} \xrightarrow[\text{per LGS}]{\text{Lösung}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0,3 & 0,3 & 0,05 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 & 0,6 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \overrightarrow{p_{-1}} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

oder

$$U \cdot \overrightarrow{p_{-1}} = \overrightarrow{p_0} \xrightarrow[\text{per Inverse}]{\text{Lösung}} \overrightarrow{p_{-1}} = U^{-1} \cdot \overrightarrow{p_0} \rightarrow \overrightarrow{p_{-1}} = \begin{pmatrix} -2,4 & 9,6 & -0,4 \\ 6,2 & -9,8 & 0,2 \\ -2,8 & 1,2 & 1,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist nicht möglich, da die Komponenten größer als 1 und negativ sind.

Langfristig wünscht sich (M)ÄH-ROB als potentieller Marktführer mind. 80 % Marktanteil.

e) Ist dies aufgrund der Ausgangssituation realisierbar?

Lösung:

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \rightarrow U \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \rightarrow (U - E)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\xrightarrow[\text{hLGS} \rightarrow \text{inhomogenes LGS}]{\sum_{i=1}^{3} x_i = 1} \left(\begin{array}{ccc|c} -0,7 & 0,3 & 0,05 & 0 \\ 0,2 & -0,9 & 0,05 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \vec{x} = \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 38 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,089 \\ 0,067 \\ 0,844 \end{pmatrix}$$

Der gewünschte Marktanteil wird mit 84,4 % übertroffen.

ZUSATZAUFGABE: (5 Punkte)

f) Lösen Sie das dem statischen Gleichgewicht zugrundeliegende LGS

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

allgemeingültig in Abhängigkeit der Variablen x_3 bzw. z.

Lösung:

$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & -0.9 & 0.05 \\ 0.5 & 0.6 & -0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7 \cdot x}{10} - \frac{3 \cdot y}{10} - \frac{z}{20} = 0 \wedge \frac{x}{5} - \frac{9 \cdot y}{10} + \frac{z}{20} = 0 \wedge \frac{x}{2} + \frac{3 \cdot y}{5} - \frac{z}{10} = 0$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{7 \cdot x}{10} - \frac{3 \cdot y}{10} - \frac{z}{20} = 0 \wedge \frac{x}{5} - \frac{9 \cdot y}{10} + \frac{z}{20} = 0 \wedge \frac{x}{2} + \frac{3 \cdot y}{5} - \frac{z}{10} = 0, [x, y]\right)$$

$$x = \frac{2 \cdot z}{19} \wedge y = \frac{3 \cdot z}{38}$$

(2) Differentialrechnung I: Extrema mit Nebenbedingung

Bei einer Ein-Produktunternehmung liegt folgende Produktionsfunktion vor:

$$f(x,y) \quad = \quad 20 \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$$

wobei x und y die ME der beiden eingesetzten Produktionsfaktoren q_1 und q_2 darstellen.

Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen
q_1 = 6 GE und q_2 = 11 GE.
Sie haben ein Budget von **b GE** und sollen daraus ein maximales Produktionsergebnis erzielen, wobei **y = 30** gelten soll.

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode und bestimmen Sie das maximale Produktionsergebnis und das zur Verfügung stehende Budget.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximalfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

c) Auf welchen Wert ändert sich das Budget im Optimalfall, wenn das Produktionsergebnis auf **2.300 ME** verändert werden sollte?

Anmerkung: Auf einen Nachweis des Maximums kann hier verzichtet werden!

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 20 \cdot x^{0,75} \cdot y^{0,25} + \lambda(b - 6x - 11y)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x(x,y,\lambda) \quad = \quad 15 \cdot \dfrac{y^{0,25}}{x^{0,25}} - 6\lambda \quad = \quad 0 \quad \to \quad \lambda \quad = \quad \dfrac{5}{2} \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^{0,25} \\ L_y(x,y,\lambda) \quad = \quad 5 \cdot \dfrac{x^{0,75}}{y^{0,75}} - 11\lambda \quad = \quad 0 \quad \to \quad \lambda \quad = \quad \dfrac{5}{11} \cdot \left(\dfrac{x}{y}\right)^{0,75} \end{array}\right\} \dfrac{5}{2} \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^{0,25} = \dfrac{5}{11} \cdot \left(\dfrac{x}{y}\right)^{0,75}$$

$$\to \quad Austauschverhältnis: \quad y = \frac{2}{11} \cdot x \quad \xrightarrow{y = \frac{2}{11} \cdot x = 30} \quad x \quad = \quad 165$$

$$\to \quad b = 6x + 11y \quad \to \quad b = 6 \cdot 165 + 11 \cdot 30 = 1.320 \quad und$$

$$\to \quad f(165;30) \quad = \quad 20 \cdot 165^{0,75} \cdot 30^{0,25} \quad = \quad 2.154,88\,[\mathrm{ME}]$$

$$Lagrangeparameter: \quad \to \quad \lambda \quad = \quad \frac{5}{11} \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^{0,75} \quad = \quad 1,632485$$

Eine Budgetänderung um k GE,
ergibt eine Änderung um $1,632 \cdot$ k [ME] am Produktionsergebnis.

$$2.300 - 2.154,88 = 145,12 \quad \to \quad \frac{145,12}{1,632485} \approx 88,90\,[\mathrm{GE}]$$

$\to$ Budget-Erhöhung um 88,90 [GE] auf 1.408,90 [GE].

(3) Differentialrechnung II: Extrema ohne Nebenbedingungen

Gegeben ist folgende Funktion:

$$f(x,y,z) = (x-y+1)^2+(x+z-1)^2+(y-z+1)^2$$

Ermitteln Sie die stationäre Stelle und prüfen Sie, ob diese ein Extremum darstellt.

Anmerkung: Die Verwendung der Kettenregel könnte sich als sinnvoll erweisen 😊

Lösung:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= (x-y+1)^2+(x+z-1)^2+(y-z+1)^2 \\
f_x(x,y,z) &= 2(x-y+1)\cdot 1+2(x+z-1)\cdot 1=0 \quad \rightarrow \quad 4x-2y+2z=0 \\
f_y(x,y,z) &= 2(x-y+1)\cdot(-1)+2(y-z+1)\cdot 1=0 \quad \rightarrow \quad -2x+4y-2z=0 \\
f_z(x,y,z) &= 2(x+z-1)\cdot 1+2(y-z+1)\cdot(-1)=0 \quad \rightarrow \quad 2x-2y+4z=4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{3}{2} \,\middle|\, 0\right)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{c} Det(H_1)=4>0 \\ Det(H_2)=12>0 \\ Det(H_3)= \\ 64+8+8-16-16-16=32>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} positiv\ definit \\ \rightarrow Minimum \end{array}\right.$$

(4) Leontief-Modell

Die Pfalzwerke stellen bei ihren Kunden aufgrund der vielen Käufe von Mährobotern einen erhöhten Energiebedarf fest. Dies führt zu Diskussionen über die drei Sektoren und den internen Verbrauch von (G)as, (W)asser und (S)trom und eine adäquate Abgabemöglichkeit an den Markt, um die Kunden nicht zu verlieren.
Die Verflechtung der drei Sektoren untereinander und mit dem Markt wird durch das Leontief-Modell mit folgender Input-Output-Tabelle und der Technologiematrix T beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \rightarrow & G & W & S & Markt & Gesamtmenge \\ G & 350 & a & 210 & y_1 & 1.000 \\ W & b & 216 & c & y_2 & 720 \\ S & 200 & 108 & 175 & y_3 & 700 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,15 & e \\ 0,25 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & d & 0,25 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Werte der Koeffizienten a bis e und die **Marktabgabe** $\vec{y}$ der Sektoren G, W und S.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} \rightarrow & G & W & S & Markt & Gesamtmenge \\ G & 350 & \frac{a}{720} = 0,15 \rightarrow a = 108 & 210 & y_1 = 1.000 - 350 - 108 - 210 = 332 & 1.000 \\ W & \frac{b}{1.000} = 0,25 \rightarrow b = 250 & 216 & \frac{c}{700} = 0 \rightarrow c = 0 & y_2 = 720 - 250 - 216 - 0 = 254 & 720 \\ S & 200 & 108 & 175 & y_3 = 700 - 200 - 108 - 175 = 217 & 700 \end{pmatrix}$$

$$und \quad T = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,15 & e = \frac{210}{700} = 0,3 \\ 0,25 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & d = \frac{108}{720} = 0,15 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Aufgrund angepasster Produktionsentscheidungen gehen wir nun folgender Leontief-Inversen aus:

$$(E-T)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Mengeneinheiten von jedem der drei Sektoren können an den Markt abgegeben werden, wenn eine Gesamtproduktion von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 8.000 \\ 3.500 \end{pmatrix}$ existiert?

Lösung:

$$Ansatz: \quad T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E-T) \cdot \vec{x} \quad \rightarrow \quad (E-T)^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{x}$$

$$\xrightarrow{LGS} \quad (E-T)^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{x} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 8.000 \\ 3.500 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

oder

$$\xrightarrow[(E-T)^{-1}]{Inverse\ zu} \quad \vec{y} = (E-T) \cdot \vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,4 \\ 0 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10.000 \\ 8.000 \\ 3.500 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

c) Im Rahmen einer Optimierung der Produktion gestaltet sich die neue Technologiematrix T wie folgt:

$$T_{neu} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0{,}15 & 0{,}2 \\ a_{21} & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Außerdem wird die Produktion in den Sektoren G, W und S auf das Verhältnis

$x_1 : x_2 : x_3 = 5 : 2 : 3$

angepasst. Die neue Marktabgabe beträgt $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1.650 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Werte der beiden Komponenten a_{11} und a_{21} der Technologiematrix und die Mengen der Gesamtproduktion?

$$T_{neu} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0{,}15 & 0{,}2 \\ a_{21} & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}5 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1.650 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -0{,}15 & -0{,}2 \\ -a_{21} & 0{,}7 & 0 \\ -0{,}2 & -0{,}15 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5c \\ 2c \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.650 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,3} -c - 0{,}3c + 1{,}5c = 300 \rightarrow 0{,}2c = 300 \rightarrow c = 1.500 \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 7.500 \\ 3.000 \\ 4.500 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,2} -7.500\,a_{21} + 2.100 + 0 = 600 \rightarrow a_{21} = \frac{1.500}{7.500} = 0{,}2$$

$$\xrightarrow{Zeile\,1} (1 - a_{11}) \cdot 7.500 - 450 - 900 = 1.650 \rightarrow 1 - a_{11} = \frac{3.000}{7.500} = 0{,}4 \rightarrow a_{11} = 0{,}6$$

(5) Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus

Aufgrund der Marktentwicklung der vergangenen Jahre ist die Geschäftsleitung auf der Suche nach dem optimalen Produktionsprogramm ihrer drei Produkte A, B und C, wobei x_1, x_2 und x_3 die zugehörigen Mengeneinheiten darstellen.
Folgende Restriktion bzw. Nebenbedingung muss hierbei eingehalten werden:

$$M_{BE(neu)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \vec{b} \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 300 \end{pmatrix}$$

der kalkulierte Verkaufspreis je Endprodukt A, B und C entspricht folgender Planung:

$$\overrightarrow{vkpreis} = \begin{pmatrix} 400 & 500 & 600 \end{pmatrix}^T$$

Unter Anwendung des Simplex-Verfahrens soll das optimale Produktionsprogramm der Unternehmung mit dem Ziel der **Maximierung des Umsatzes** bestimmt werden.

a) Füllen Sie die notwendigen Daten des Tableaus zur Berechnung aus und erklären Sie den Begriff und die Notwendigkeit der Schlupfvariablen.

Führen Sie die notwendigen Umformungen durch, um auf Tableau 1 zu gelangen.

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I								
II								
III								
ZF								
I								
II								
III								
ZF								
I								
II								
III								
ZF								

Nach einigen Umformungsschritten mittels Simplexalgorithmus gelangen Sie (hoffentlich) auf folgendes **Tableau 1**:

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	**0**	**1**	$-\frac{1}{3}$	**0**	**50**	
II	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	**1**	**0**	$\frac{1}{3}$	**0**	**150**	
III	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	**0**	**0**	$-\frac{1}{3}$	**1**	**150**	
ZF	**0**	**300**	**0**	**0**	**-200**	**0**	**U – 90.000**	

b) Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?

c) Bestimmen Sie das Pivot-Element von Tableau 1. Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise.

d) Erstellen Sie nun ausgehend von **Tableau 1** das Endtableau, geben Sie die vollständige Lösung an.

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	**0**	**1**	$-\frac{1}{3}$	**0**	**50**	
II	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	**1**	**0**	$\frac{1}{3}$	**0**	**150**	
III	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	**0**	**0**	$-\frac{1}{3}$	**1**	**150**	
ZF	**0**	**300**	**0**	**0**	**-200**	**0**	**U – 90.000**	
I								
II								
III								
ZF								
I								
II								
III								
ZF								

Lösung:

Aus einem System von Ungleichungen im Rahmen der Nebenbedingungen und Restriktionen soll mit der Einführung der Schlupfvariablen ein LGS hergestellt werden; die Schlupfvariablem nehmen zum Start die sogenannte Basislösung ein und mittels Simplexalgorithmus (Im Sinne des Gauß-Verfahrens) wird die optimale Lösung generiert und die Werte für die gesuchten Variablen x_1, x_2 und x_3 bestimmt.

Ansatz Nebenbedingungen:

Durch Einführung der Schlupfvariablen u_1, u_2 und u_3 werden aus den Ungleichungen die gewünschten Gleichungen als Grundlage des Simplexalgorithmus.
Die Schlupfvariablen sind hierbei als additive Komponenten zu interpretieren, die eventuelle nicht ausgenutzte Ressourcen ausgleichen bzw. im Wert ergänzen, um eine Gleichung zu erhalten

$$\begin{array}{c|l} I & x_1+x_2+x_3 \le 200 \\ \hline II & 2x_1+x_2+3x_3 \le 450 \\ \hline III & 3x_1+\frac{11}{3}x_2+x_3 \le 300 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|l} I & x_1+x_2+x_3+u_1=200 \\ \hline II & 2x_1+x_2+3x_3+u_2=450 \\ \hline III & 3x_1+\frac{11}{3}x_2+x_3+u_3=300 \end{array}$$

Lösungsschritte bis zum Zwischentableau:

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	*Umformung*
I	1	1	1	1	0	0	200	
II	2	1	3	0	1	0	450	$\frac{1}{3}\cdot II$
III	3	$\frac{11}{3}$	1	0	0	1	300	
ZF	400	500	600	0	0	0	u	

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	*Umformung*
I	1	1	1	1	0	0	200	$I-II$
II	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	150	
III	3	$\frac{11}{3}$	1	0	0	1	300	$III-II$
ZF	400	500	600	0	0	0	u	$ZF-600\cdot II$

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	*Umformung*
I	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	50	
II	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	150	
III	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	150	$III\cdot\frac{3}{10}$
ZF	0	300	0	0	-200	0	$u-90.000$	

Bzw. die komplette Lösung:

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	$Umformung$
I	1	1	1	1	0	0	200	
II	2	1	3	0	1	0	450	$\frac{1}{3}\cdot II$
III	3	$\frac{11}{3}$	1	0	0	1	300	
ZF	400	500	600	0	0	0	u	

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	$Umformung$
I	1	1	1	1	0	0	200	$I-II$
II	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	150	
III	3	$\frac{11}{3}$	1	0	0	1	300	$III-II$
ZF	400	500	600	0	0	0	u	$ZF-600\cdot II$

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	$Umformung$
I	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	50	
II	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	150	
III	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	150	$III\cdot\frac{3}{10}$
ZF	0	300	0	0	-200	0	$u-90.000$	

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	$Umformung$
I	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	50	$I-\frac{2}{3}\cdot III$
II	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	150	$II-\frac{1}{3}\cdot III$
III	$\frac{7}{10}$	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	45	
ZF	0	300	0	0	-200	0	$u-90.000$	$ZF-300\cdot III$

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b
I	$-\frac{2}{15}$	0	0	1	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{5}$	20
II	$\frac{13}{30}$	0	1	0	$\frac{11}{30}$	$-\frac{1}{10}$	135
III	$\frac{7}{10}$	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	45
ZF	-210	0	0	0	-170	-90	$u-103.500$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \\ 135 \\ 20 \end{pmatrix} \quad mit \quad u_{\max} = 103.500\,[GE]$$

b) Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?

Lösung:

In der ZF-Zeile ist mit dem Wert 300 in der x_2-Spalte noch ein Wert positiv, so dass mindestens noch ein weiterer Optimierungsschritt notwendig ist.

c) Bestimmen Sie das Pivot-Element von Tableau 1. Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise.

Lösung:

Schritt 1: **Ermittlung der Pivot-Spalte**

- ⇨ Wahl der Spalte mit dem größten positiven Wert in der ZF-Zeile.

Schritt 2: **Ermittlung des Pivot-Elements**

- ⇨ Um die stärkste restriktive Einschränkung zu erhalten, werden die positiven Koeffizienten der Zeilen I bis III (= Nebenbedingungen) in der Pivot- Spalte jeweils durch die im Rahmen des bisherigen Umformungsprozesses entstandenen Restriktionswerte dividiert; der kleinste positive Quotientenwert führt dann zum Pivotelement, da dies die größte Knappheit der Ressourcen darstellt.

(6) Deskriptive Statistik I:
Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße (diskret)

Dozent Knödelhuber unterrichtet an der Dualen Hochschule Mannheim im Schweiße seines Angesichts Mathematik und Statistik.
Im Rahmen der Klimadiskussion überlegt er sich, ob er zukünftig ganz auf die S-Bahn umsteigen sollte und hat hierzu einige Testdaten aus den bisherigen Fahrten gesammelt:

Benötigte Fahrzeit [in Minuten]	Anzahl der Fahrten
45	7
50	15
52	12
55	13
60	2
80	1
Summe	

a) Bestimmen Sie aus den Daten folgende Größen: Arithmetisches Mittel, Modus und Median
b) Ermitteln Sie die zugehörigen Streumaße Standardabweichung und beide Quartile.
c) Beurteilen Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse die Situation und geben Sie eine Empfehlung.

Lösung:

Benötigte Fahrzeit [in Minuten]	Anzahl der Fahrten	Gesamminuten	rel. Hkeit	kum. rel. Hkeit	kum. abs. Hkeit	quadr. Fahrzeit	gewichtet
45	7	315	0,14	0,14	7	2025	283,5
50	15	750	0,3	0,44	22	2500	750
52	12	624	0,24	0,68	34	2704	648,96
55	13	715	0,26	0,94	47	3025	786,5
60	2	120	0,04	0,98	49	3600	144
80	1	80	0,02	1	50	6400	128
Summe	50	2604	1				2740,96
Arithm. MW	52,08	2604/50		Varianz	28,6336		
				Std.Abw.	5,35103728		
Modus	50	häufigster Wert					
Median	52	$0,5 * (x_{25} + x_{26})$		Quartil 1:	50	x_{13}	
				Quartil 3:	55	x_{38}	

(7) Deskriptive Statistik II:
Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße (stetig / klassiert)

Dozent Knödelhuber unterrichtet (immer noch) an der Dualen Hochschule Mannheim Mathematik und Statistik.
Um eine endgültige klimafreundliche aber auch nervenschonende Entscheidung treffen zu können, hat er einige Testdaten aus den letzten Fahrten mit dem Pkw gesammelt:

Häufigkeitstabelle der Fahrten mit dem Pkw:

Fahrzeit [Min]	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufigkeits-dichte	kum. rel. Häufigkeit
[32 ; 40[	20					
[40 ; 46[	40	0,4				
[46 ; 50[		0,25				
[50 ; 56[	10					
[56 ; 70[						
Summe						

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.
b) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.
c) Berechnen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.

Lösung:

Fahrzeit [Min]	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufigkeits-dichte	kum. rel. Häufigkeit	quadriert	gewichtet
[32 ; 40[	20	0,2	36	8	2,50	0,2	1296	259,2
[40 ; 46[	40	0,4	43	6	6,67	0,6	1849	739,6
[46 ; 50[	25	0,25	48	4	6,25	0,85	2304	576
[50 ; 56[	10	0,1	53	6	1,67	0,95	2809	280,9
[56 ; 70[	5	0,05	63	14	0,36	1	3969	198,45
Summe	100	1						2054,15

Arith MW	44,85

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k}\left[(x_i)_m \cdot \frac{n_i}{n}\right] = \sum_{i=1}^{k}\left[(x_i)_m \cdot p_i\right]$$

$mit\ (x_i)_m\ als\ Klassenmitte\ der\ Klasse\ i$

Modus	43	[40 ; 46[	HDI (maximal)

Median	44,5

$$\overline{x_M} \Rightarrow \overline{x_{0,5}} = [a;b] \rightarrow \overline{x_{0,5}} = a + \frac{\Delta_i \cdot [0,5 - F(a)]}{p_i}$$

$\Delta_i = Klassenbreite \quad p_i = rel.\,Häufigkeit$

Varianz	42,6275
StdAbw.	6,53

$$V(X) \overset{Rechen}{\underset{formel}{=}} \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i)_m^2 \cdot p_i\right] - \bar{x}^2 \quad \Rightarrow \quad S(X) = \sqrt{V(X)}$$

$mit\ (x_i)_m\ als\ Klassenmitte\ der\ Klasse\ i$

Quartil 1	40,75
Quartil 3	48,4

$$q_1 \Rightarrow \overline{x_{0,25}} = [a;b] \rightarrow \overline{x_{0,25}} = a + \frac{\Delta_i \cdot [0,25 - F(a)]}{p_i}$$

$$q_3 \Rightarrow \overline{x_{0,75}} = [a;b] \rightarrow \overline{x_{0,75}} = a + \frac{\Delta_i \cdot [0,75 - F(a)]}{p_i}$$

$\Delta_i = Klassenbreite \quad p_i = rel.\,Häufigkeit$

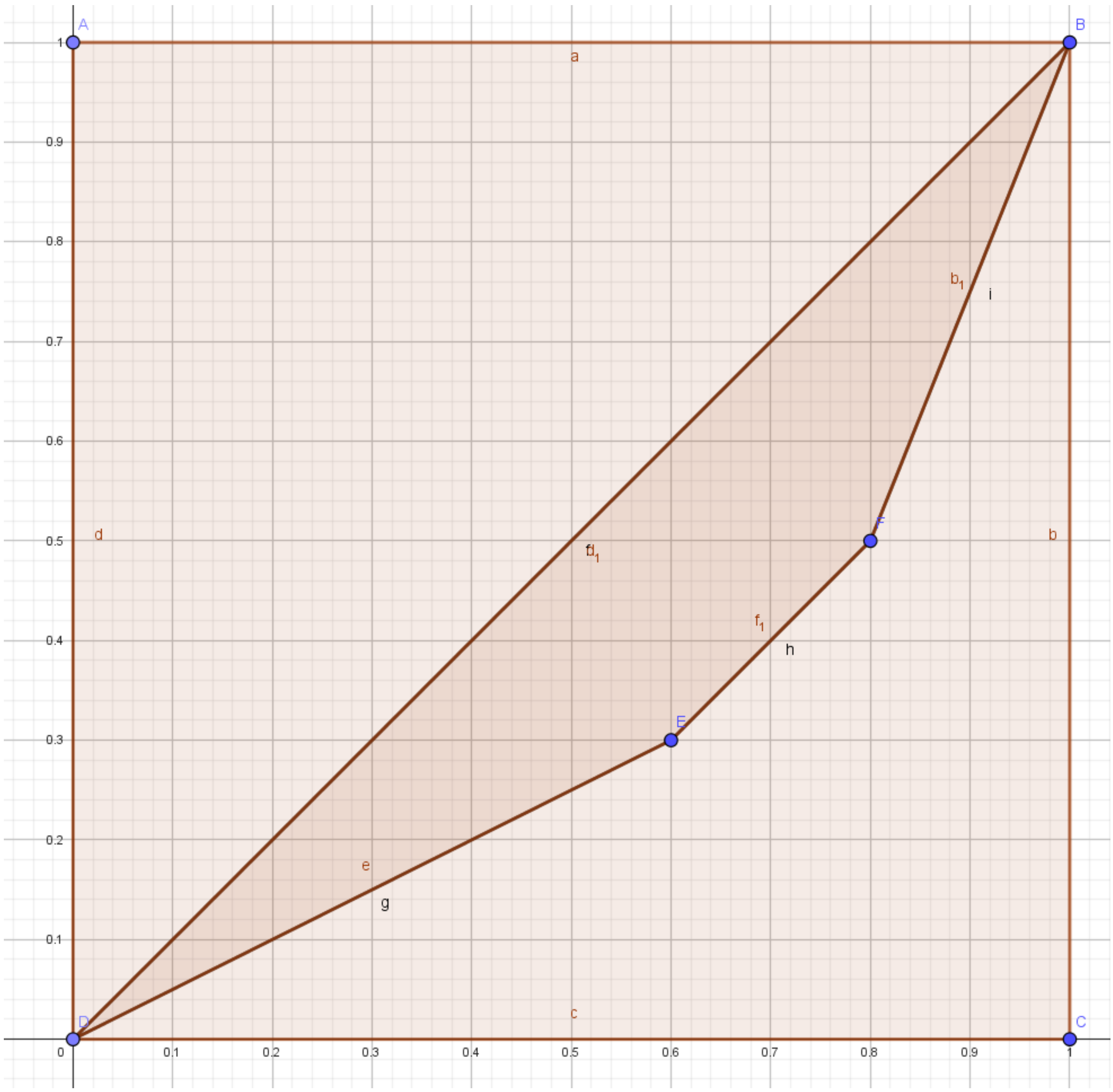
(8) Deskriptive Statistik III: Teil I: Gini-Koeffizient & Lorenzkurve

Im Landkreis Statistika gibt es 5 Krankenkassen (x-Achse), wobei sich die Gesamtzahl **der 2 Mio. Mitglieder** (y-Achse) wie folgt aufteilt:

Krankenkasse	Absolute Mitgliederanzahl	Relative Mitgliederanzahl
KMK	200.000	
KDA	400.000	
MKD	200.000	
Zwerg		
Hightower		0,5

Zeichnen Sie die dazugehörige Lorenzkurve und berechnen Sie den Gini-Koeffizient.

Lösung:



Krankenkasse	rel. Anteil	kum. rel. Anteil	Absolute Mitgliederanzahl	Relative Mitgliederanzahl	kum. Rel. Mit-Anzahl
KMK; MKD; Zwerg	0,6	0,6	600.000	0,3	0,3
KDA	0,2	0,8	400.000	0,2	0,5
Hightower	0,2	1	1.000.000	0,5	1
Summe	1	x-Achse	2.000.000	1	y-Achse

Fläche unter Lorenzkurve	
Fläche 1:	0,09
Fläche 2:	0,08
Fläche 3:	0,15
Gesamt:	0,32

Konz-Fläche:	0,18
GK:	0,36
GK normiert:	0,45

Teil II: Warenkorbmethode und Preisindexberechnung

Ein Unternehmen hat eine Preis-Mengen-Übersicht für die bezogenen Güter A, B und C angefertigt.

Gut	Preise		Mengen	
	2020	2023	2020	2023
A	10	15	60	50
B	25	20	40	70
C	30	40	80	60

a) Ermitteln Sie hierzu die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche.
b) Berechnen Sie den Preisindex nach Fisher.
c) Wie hoch ist die jährliche Inflationsrate auf der Grundlage der Daten nach Laspeyres?

Lösung:

$$Laspeyres: \quad L_P = \frac{\sum p_{23i} \cdot q_{20i}}{\sum p_{20i} \cdot q_{20i}} \rightarrow L_P = \frac{15 \cdot 60 + 20 \cdot 40 + 40 \cdot 80}{10 \cdot 60 + 25 \cdot 40 + 30 \cdot 80} = \frac{4900}{4000} = 1{,}225$$

$$\rightarrow \frac{\text{Ausgaben des Berichtsjahres mit Mengen des Basisjahres (Menge }_{\text{Periode I}} \text{ * Preis }_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben/Umsatz des Basisjahres (Menge }_{\text{Periode I}} \text{ * Preis }_{\text{Periode I}})}$$

$$Paasche: \quad P_P = \frac{\sum p_{23i} \cdot q_{23i}}{\sum p_{20i} \cdot q_{23i}} \rightarrow P_P = \frac{15 \cdot 50 + 20 \cdot 70 + 40 \cdot 60}{10 \cdot 50 + 25 \cdot 70 + 30 \cdot 60} = \frac{4550}{4050} = 1{,}1234$$

$$\rightarrow \frac{\text{Ausgaben/Umsatz des Berichtsjahres (Menge }_{\text{Periode II}} \text{ * Preis }_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben des Basisjahres mit Mengen des Berichtsjahres (Menge }_{\text{Periode II}} \text{ * Preis }_{\text{Periode I}})}$$

$$F_P = \sqrt{L_P \cdot P_P} \rightarrow \sqrt{1{,}225 \cdot 1{,}1234} = 1{,}1731$$

$$\text{Inflationsrate: } \sqrt[3]{1{,}225} = 1{,}069987 \rightarrow i_{eff} = 1{,}069987 - 1 = 0{,}069987 \xrightarrow{\cdot 100} 6{,}9987\,[\%]$$