**Klausur Wirtschaftsmathematik**

**Fakultät für Technik**

**Studiengang**: Integrated Engineering Datum: 02.06.2025

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matrikelnummer:** |  | | | | **Dozent: Jürgen Meisel** | |
| **Kurs: TIE 23 EN** | | **Semester:** | 4 |  | |  |
| **Hilfsmittel: *Wiss. TR (nicht programmierbar) und***  ***Formelsammlung*** | | | | **Bearbeitungszeit: 90 min.** | | |
| **Bewertung:** | Maximale Punktzahl: 90 | | | Erreichte Punktzahl: | |  |
| **Prozente:** | ................ | | | Signum: ................ | | |
| **Anmerkungen:** | ***Von 8 gestellten Aufgaben müssen 6 ausgewählt und bearbeitet werden.*** | | | | | |

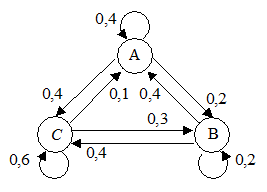
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Aufgabennummer** |  | **maximale**  **Punkte** | **erreichte**  **Punkte** | **Bemerkungen** |
| **A 1:**  **Übergangsmatrizen und stat.**  **Gleichgewicht** |  | **15** |  |  |
| **A 2:**  **Diff.-Rg I (Extrema mit NB)** |  | **15** |  |  |
| **A 3:**  **Diff.-Rg II (Extrema ohne NB)** |  | **15** |  |  |
| **A 4:**  **Lineare Optimierung** |  | **15** |  |  |
| **A 5: Statistik I - Mittelwerte & Streumaße (klassiert)** |  | **15** |  |  |
| **A 6: Statistik II - Mittelwerte & Streumaße (diskret / Einzelwerte)** |  | **15** |  |  |
| **A 7: Statistik III –**  **Gini-Koeffizient & Lorenzkurve** |  | **15** |  |  |
| **A 8: Statistik IV –**  **Regression und Korrelation & Warenkorbmethode mit Preisindizes** |  | **15** |  |  |
| **Summe** |  | **90** |  |  |

**Klausur QR-Methoden**

1. **Matrizen und Vektoren:**

**Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht**

Zwischen drei Regionen A, B und C findet ein Bevölkerungsaustausch durch Umzüge statt. Das Diagramm zeigt diesen Austausch in Anteilen innerhalb eines Jahres.



**2a**

**a**

Die Einwohnerzahlen in Tausend betrugen 2025 zu Beginn der Modellierung:

**Region A: 200.000 Region B: 150.000 Region C: 50.000**

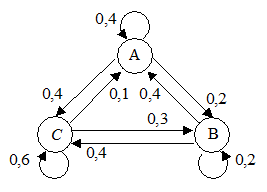
1. Bilden Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor.

**Lösung:**



**2a**

**a**



1. Wie wird sich die Verteilung der Bevölkerung in den kommenden

beiden Jahren (2026 – 2027) entwickeln?

**Lösung:**

1. Bestimmen Sie das statische Gleichgewicht zu dieser Situation.

**Lösung:**



1. **Differentialrechnung I: Extrema mit Nebenbedingung**

### Gegeben sei folgende Produktionsfunktion:

# Eine Mengeneinheit für x kostet **k** GE, der Preis für eine Mengeneinheit

# von y liegt bei **1,5k** GE mit k > 0.

Insgesamt steht ein Budget von **b = 4.500** GE zur Verfügung.

1. Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des

Lagrangeansatzes in Abhängigkeit von k.

**Lösung:**



1. Die Produktionsmenge von x soll im Intervall [450 ; 1.800] liegen.

Ermitteln Sie daraus den Wertebereich für k und bestimmen Sie

den Produktionsbereich für y.

**Lösung:**



1. Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter **λ** im Maximumfall und

welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich

das Budget b um **100** GE erhöht?

***Anmerkung: Auf einen Nachweis des Maximums kann hier verzichtet werden!***

**Lösung:**



1. **Differentialrechnung II: Extrema ohne Nebenbedingungen**

Gegeben sei folgende Funktion:



1. Zeigen Sie, dass nur drei stationäre Stellen vorliegen.
2. Prüfen Sie die stationären Stellen auf Extremwerteigenschaft.

**Lösung:**





Option:



**Lösung:**



1. **Lineare Optimierung**

Ein Betrieb stellt auf drei Maschinen verschiedene Produkte her. Die Bearbeitungszeiten in Minuten für die Produkte A und B und deren Verkaufspreise sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Produkt A | Produkt B | Kapazität in Minuten |
| Maschine 1 | 5 | 3 | 120 |
| Maschine 2 | 3 | 3 | 81 |
| Maschine 3 | 3 | 6 | 120 |

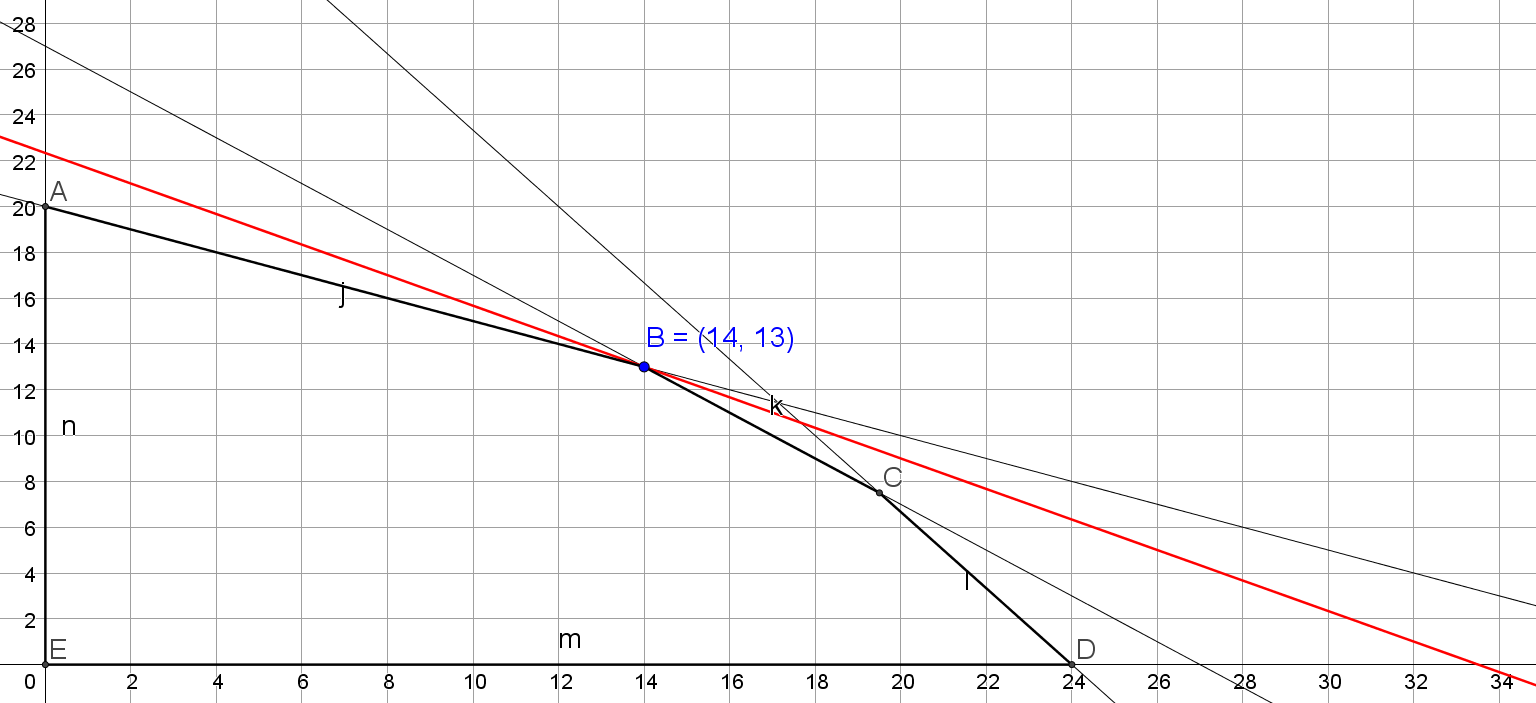
Verkaufspreis Produkt A: 20,00 € Verkaufspreis Produkt B: 30,00 €

Gesucht ist das umsatzmaximierende Produktionsprogramm.

1. Stellen mittels graphischer Lösung das optimale Produktionsprogramm dar,

bestimmen Sie das Gewinnmaximum und ***geben Sie die Lösung an***.

**Lösung:**



Gmax (14 / 13) = 20 \* 14 + 13 \* 30 = 670

Unter Anwendung des Simplex-Verfahrens soll das optimale Produktionsprogramm

der Unternehmung mit dem Ziel der Maximierung des Gewinns bestimmt werden.

Nach einigen Umformungsschritten mittels Simplexalgorithmus gelangen Sie auf Tableau 1:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **x1** | **x2** | **u1** | **u2** | **u3** | **b** | **Umformung** |
| **I** | **3,5** | **0** | **1** | **0** | **-0,5** | **60** |  |
| **II** | **1,5** | **0** | **0** | **1** | **-0,5** | **21** |  |
| **III** | **0,5** | **1** | **0** | **0** |  | **20** |  |
| **ZF** | **5** | **0** | **0** | **0** | **-5** | **G - 600** |  |

b) Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?

**Lösung: In der Zeile ZF (Zielfunktion) befindet sich noch eine positive Zahl.**

c) Bestimmen Sie das Pivot-Element von Tableau 1. Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise.

**Lösung:**

* **Pivotspalte x1 wegen positiven ZF-Wert**
* **Division der Werte der Ergebnisspalte b mit den Koeffizienten in der Pivotspalte**
* **Wahl des kleinsten Quotienten wegen Restriktion**

d) Erstellen Sie nun ausgehend von **Tableau 1** das Endtableau, geben Sie die vollständige

Lösung an.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **x1** | **x2** | **u1** | **u2** | **u3** | **b** | **Umformung** |
| **I** | **3,5** | **0** | **1** | **0** | **-0,5** | **60** |  |
| **II** | **1,5** | **0** | **0** | **1** | **-0,5** | **21** |  |
| **III** | **0,5** | **1** | **0** | **0** |  | **20** |  |
| **ZF** | **5** | **0** | **0** | **0** | **-5** | **G - 600** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **I** | **3,5** | **0** | **1** | **0** | **-0,5** | **60** | **60/3,5 = 120/7** |
| **II** | **1,5** | **0** | **0** | **1** | **-0,5** | **21** | **21/1,5 = 14 = > ii/1,5** |
| **III** | **0,5** | **1** | **0** | **0** |  | **20** | **20/0,5 = 40** |
| **ZF** | **5** | **0** | **0** | **0** | **-5** | **G - 600** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **I** | **3,5** | **0** | **1** | **0** | **-0,5** | **60** | **i – 3,5ii** |
| **II** | **1** | **0** | **0** |  |  | **14** |  |
| **III** | **0,5** | **1** | **0** | **0** |  | **20** | **iii - 0,5ii** |
| **ZF** | **5** | **0** | **0** | **0** | **-5** | **G - 600** | **ZF - 5ii** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **I** | **0** | **0** | **1** |  |  | **11** | **u1 = 11** |
| **II** | **1** | **0** | **0** |  |  | **14** | **x1 = 14** |
| **III** | **0** | **1** | **0** |  |  | **13** | **x2 = 13** |
| **ZF** | **0** | **0** | **0** |  |  | **G - 670** | **G = 670** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

1. **Deskriptive Statistik I: Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße (klassiert)**

Eine Umfrage unter 240 Schülern ergab folgende Verteilung des

monatlichen Taschengeldes in €:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Klasse** |  |  |  |  |  |  |
| **rel. H.** | **x %** | **1,5x %** | **2x %** | **15 %** | **3x %** | **x %** |

1. Füllen Sie die Tabelle anhand der Angaben korrekt aus.

**Anlage: Tabelle zur Bearbeitung**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Klasse** | **Abs. H‘keit** | **Rel. H‘keit** | **Kum. rel. H‘keit** | **Klassenmitte** | **Klassenbreite** | **Häufigkeitsdichte** |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Klasse** | **abs. H'keit** | **rel. H'keit** | **kum. rel. H'keit** | **KM** | **KB** | **HDI** |
| **[0 ; 5[** | **24** | **0,10** | **0,10** | **2,5** | **5** | **4,80** |
| **[5 ; 10[** | **36** | **0,15** | **0,25** | **7,5** | **5** | **7,20** |
| **[10 ; 20[** | **48** | **0,20** | **0,45** | **15** | **10** | **4,80** |
| **[20 ; 30[** | **36** | **0,15** | **0,60** | **25** | **10** | **3,60** |
| **[30 ; 50[** | **72** | **0,30** | **0,90** | **40** | **20** | **3,60** |
| **[50 ; 75]** | **24** | **0,10** | **1,00** | **62,5** | **25** | **0,96** |
| **Summe** | **240** | **1** | **---** |  | **75** |  |

**NR: 240 = 8,5 x + 36 => 204 = 8,5 x => x = 24**

1. Ermitteln Sie das arithmetische Mittel.

**Lösung:**



1. Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.

**Lösung:**



|  |  |
| --- | --- |
| **Varianz:** | **322,796875** |
| **StdAbw:** | **17,9665488** |

1. Bestimmen Sie den Median, die beiden Quartilwerte und den Modus.

**Lösung:**



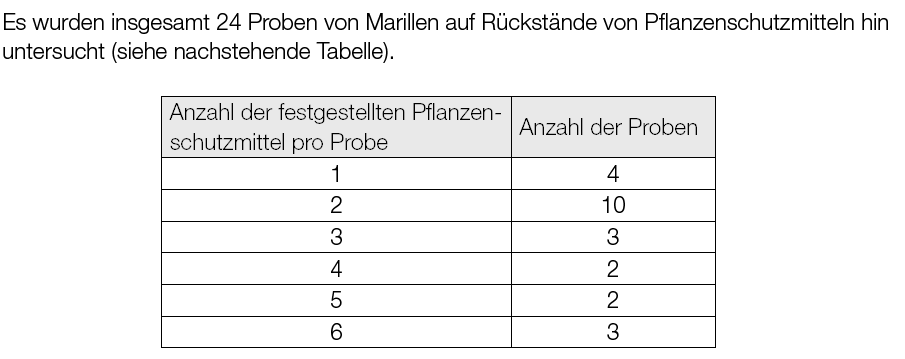
e) Wie viel Taschengeld geben die Eltern insgesamt monatlich aus?

**Lösung:**



1. **Deskriptive Statistik II: Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße (Einzelwerte)**

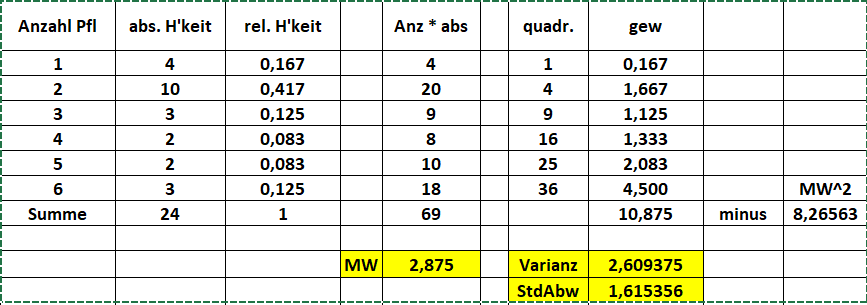
**Teil 1:**



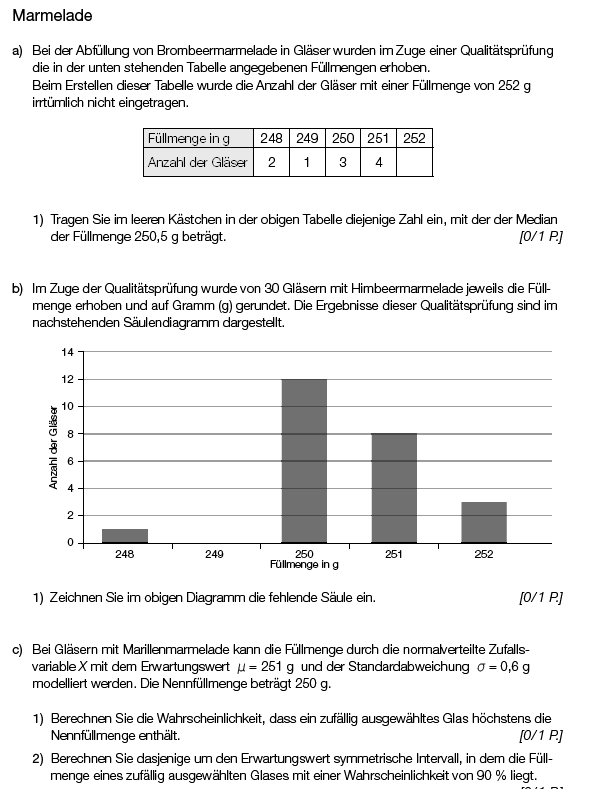
Bestimmen Sie das **arithmetische Mittel und die Standardabweichung** der Anzahl

der festgestellten Pflanzenschutzmittel.

**Lösung:**

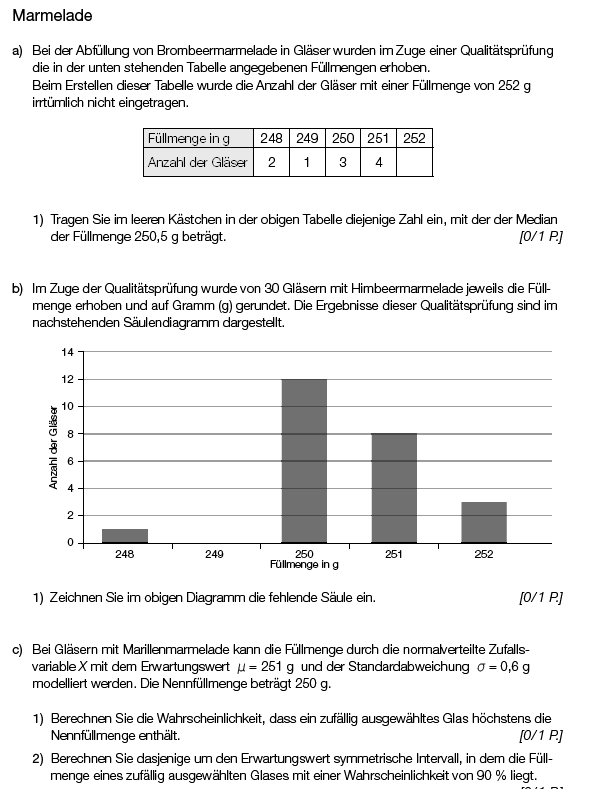


**Teil 2:**



1. Zeichnen Sie in obigem Diagramm die fehlende Säule ein und ermitteln Sie
2. den Modus,
3. den Median
4. und die beiden Quartile.

**Lösung:**



**NR: 30 – 1 – 12 – 8 – 3 = 6**

**Modus: 250 Gramm (12 Gläser => größte Anzahl)**

**Median:**



**Quartile:**



1. **Deskriptive Statistik III: Gini-Koeffizient & Lorenzkurve**

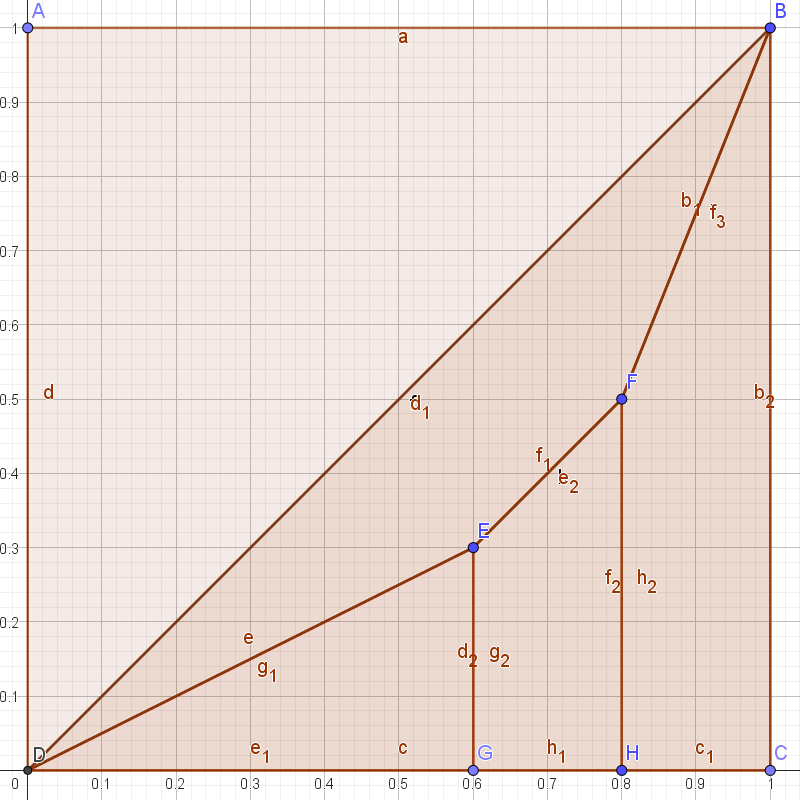
Im Landkreis Statistika gibt es 5 Krankenkassen (x-Achse), wobei sich die Gesamtzahl der **2 Mio.**

**Mitglieder** (y-Achse) wie folgt aufteilt:

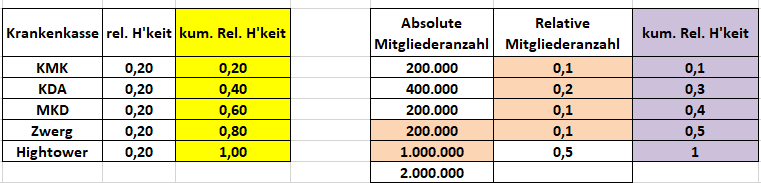
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Krankenkasse** | **Absolute Mitgliederanzahl** | **Relative Mitgliederanzahl** |
| **KMK** | **200.000** |  |
| **KDA** | **400.000** |  |
| **MKD** | **200.000** |  |
| **Zwerg** |  |  |
| **Hightower** |  | **0,5** |

Zeichnen Sie die dazugehörige Lorenzkurve und berechnen Sie den Gini-Koeffizient.

**Lösung:**

****

**Tabellen ausgefüllt**



**Tabellen entsprechend der Mitgliederanzahl geordnet**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Krankenkasse** | **rel. H'keit** | **kum. Rel. H'keit** |  | **Absolute Mitgliederanzahl** | **Relative Mitgliederanzahl** | **kum. rel. H'keit** |
| **KMK; MKD; Zwerg** | **0,60** | **0,60** |  | **600.000** | **0,3** | **0,3** |
| **KDA** | **0,20** | **0,80** |  | **400.000** | **0,2** | **0,5** |
| **Hightower** | **0,20** | **1,00** |  | **1.000.000** | **0,5** | **1** |
|  | **1** |  |  | **2.000.000** | **1** |  |

**Gini-Koeffizient: GK = 0,36**

**Normierter Gini-Koeffizient: norm. GK = 0,36 \* 5/4 = 0,45**

****

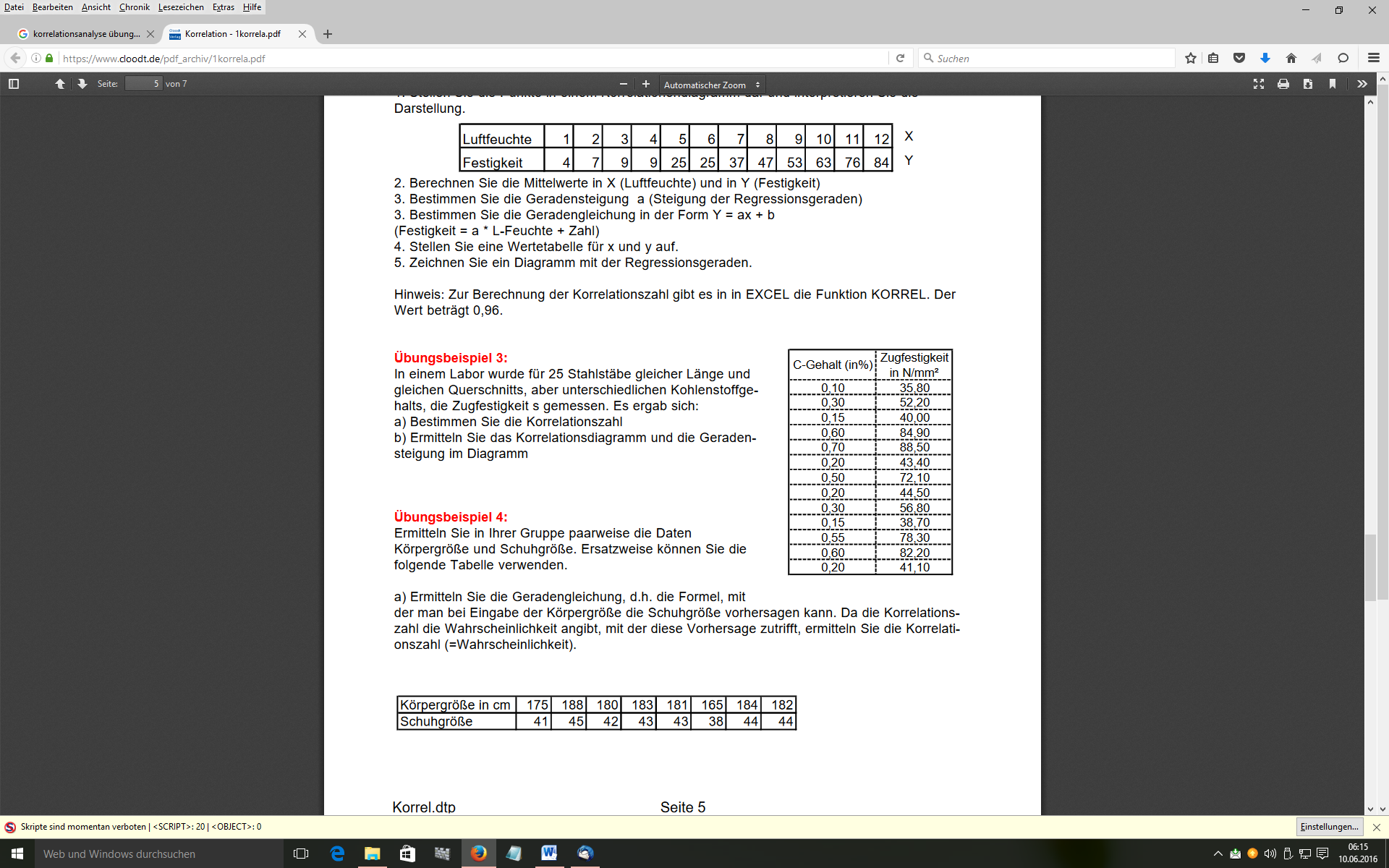
**Nebenrechnungen – Flächen unter der Lorenzkurve:**

**A1 = 0,5 \* 0,6 \* 0,3 = 0,09 A2 = 0,5 \* (0,3 + 0,5) \* 0,2 = 0,08 A3 = 0,5 \* (0,5 + 1) \* 0,2 = 0,15**

**A (gesamt) = 0,09 + 0,08 + 0,15 = 0,32 => KF = 0,5 – 0,32 = 0,18**

1. **Deskriptive Statistik IV:**

**Regression und Korrelation & Warenkorbmethode mit Preisindizes**

**Teil 1:**

In einem Labor wurde für 13 Stahlstäbe gleicher Länge

und gleichen Querschnitts, aber unterschiedlichen Kohlen-

stoffgehalts, die Zugfestigkeit s gemessen.

Es ergab sich nebenstehendes Messergebnis:

1. Ermitteln Sie die zugehörige

Regressionsgerade s(C).

1. Wie hoch ist die voraussichtlich Zugfestigkeit

bei einem C-Gehalt von 0,9 %?

1. Welcher C-Gehalt muss vorliegen, wenn eine

Zugfestigkeit 150 N/mm2 gewünscht wird?

1. Berechnen Sie den zugehörigen Korrelationskoeffizient

nach Pearson.

**Lösung:**



**Teil 2: Warenkorbmethode und Preisindexberechnung**

Ein Unternehmen hat eine Preis-Mengen-Übersicht für die bezogenen Güter A, B und C angefertigt.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Gut** | **Preise** | | **Mengen** | |
| **2020** | **2025** | **2020** | **2025** |
| **A** | **10** | **15** | **60** | **50** |
| **B** | **25** | **20** | **40** | **70** |
| **C** | **30** | **40** | **80** | **60** |

1. Ermitteln Sie hierzu die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche.

**Lösung:**



1. Berechnen Sie den Preisindex nach Fisher.

**Lösung:**



1. Wie hoch ist die jährliche Inflationsrate auf der Grundlage der Daten nach Laspeyres?

**Lösung:**

