Klausur: Mathematik am Dienstag, den 15. Dezember 2009

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht grafikfähiger. Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die zwei stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{6}x^3 - 2xy + y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

Lösung:

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 2y \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{II\ in\ I} \quad x\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 4$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = x$$

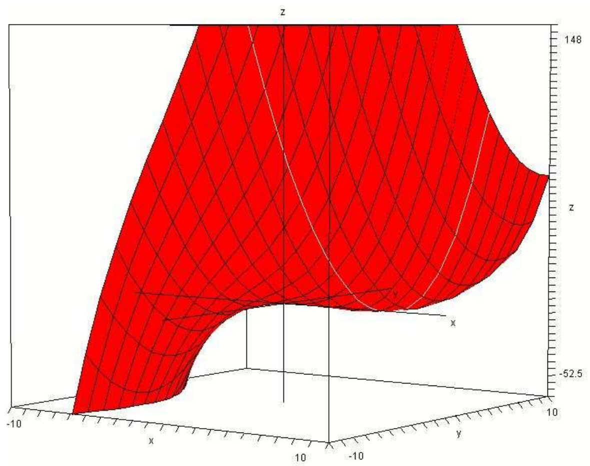
$$\Rightarrow \quad y_1 = 0 \quad und \quad y_2 = 4$$

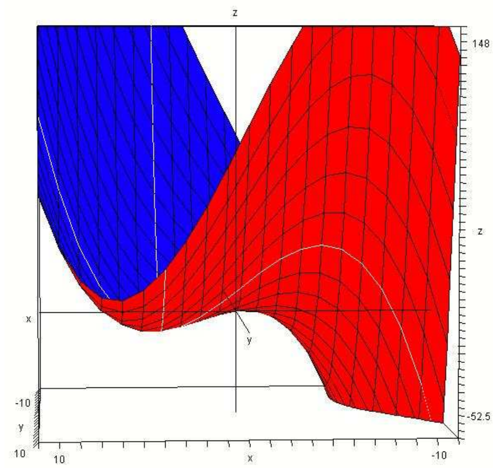
Es resultieren zwei stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 0 \mid 0)$ *und* $S_2\left(4 \,\middle|\, 4 \,\middle|\, -\frac{16}{3}\right)$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} x & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_1}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = 4 > 0 \ \wedge \ \det(H) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(4 \,\middle|\, 4 \,\middle|\, -\frac{16}{3}\right)$$





2.) **Integralrechnung**

Gegeben seien die Nachfragefunktion $p_N(x) = \frac{4}{x^2} + 22$

und die Angebotsfunktion $p_A(x) = 5,25x^2 + 2$

Berechnen Sie die **<u>Produzentenrente</u>**.

<u>Lösung:</u>

$$p_A(x) = p_N(x) \Rightarrow 5,25x^2 + 2 = \frac{4}{x^2} + 22$$

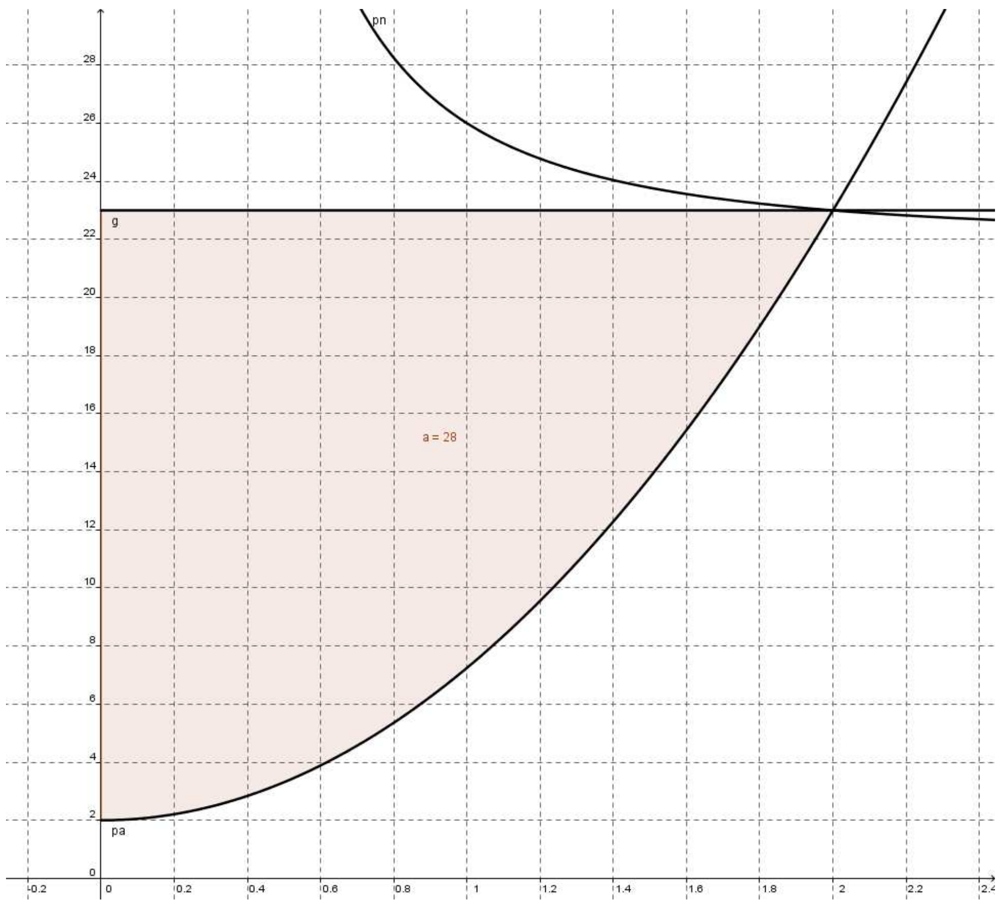
$$\Rightarrow 5,25x^4 - 20x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{u = x^2} 5,25u^2 - 20u - 4 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 4 \wedge u_2 = -\frac{4}{21} \xrightarrow{\text{Resub.}} |x| = 2$$

$$p_A(2) = 5,25 \cdot 2^2 + 2 = 23 \Rightarrow M(2 \mid 23)$$

$$P_R = 2 \cdot p_A(2) - \int_0^2 (5,25x^2 + 2)\,dx = 46 - \left[\frac{5,25}{3}x^3 + 2x\right]_0^2$$

$$P_R = 46 - 14 - 4 = 28$$



3.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 4x^{0,3}y^{0,7}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 6 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 10 €. Das Budget beträgt insgesamt 2.000 €.

Bestimmen Sie das optimale Produktionsergebnis q_{max} .

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 4x^{0,3}y^{0,7} + \lambda(2.000 - 6x - 10y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 1{,}2 \cdot \frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} - 6\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1{,}2}{6} \cdot \frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \quad = \quad 2{,}8 \cdot \frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} - 10\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{2{,}8}{10} \cdot \frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

$$Austauschverhältnis:$$

$$0{,}2 \cdot \frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} \quad = \quad 0{,}28 \cdot \frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad 1{,}4x$$

$$eingesetzt\ in\ NB:$$

$$2.000 \quad = \quad 6x + 10y \quad \xrightarrow{y \ = \ 1{,}4x} \quad 2.000 \quad = \quad 6x + 10 \cdot 1{,}4x$$

$$\Rightarrow \quad 2.000 \quad = \quad 20x \quad \Rightarrow \quad x = 100 \quad \Rightarrow \quad y = 140$$

$$\Rightarrow \quad q(100 \mid 140) \quad = \quad 4 \cdot 100^{0,3} \cdot 140^{0,7} \quad \approx \quad 506{,}23$$

4.) **Rechen- und Ableitungstechnik**

a) Bilden Sie die jeweils ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $$f(x,y) = e^{2x}(3y-1)^2 + 4x$$

Lösung: $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2e^{2x}(3y-1)^2 + 4 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6e^{2x}(3y-1)$$

(ii) $$f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{4}\left(x^{2k} - ky^4z^2\right)$$

Lösung:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{4}\left(x^{2k} - ky^4z^2\right) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 - 10y^4z^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 6x^5 + 8x^7 \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -40y^3z^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -20y^4z$$

b) Bilden Sie die Entwicklung nach dem Binomischen Lehrsatz und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich:

$$\left(\frac{1}{2}x + 4y\right)^5$$

Lösung:

$$\left(\frac{1}{2}x + 4y\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}x\right)^5 \cdot (4y)^0 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}x\right)^4 \cdot (4y)^1 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 \cdot (4y)^2$$
$$+ \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot (4y)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}x\right)^1 \cdot (4y)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}x\right)^0 \cdot (4y)^5$$

$$\left(\frac{1}{2}x + 4y\right)^5 = \frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{4}x^4y + 20x^3y^2 + 160x^2y^3 + 640xy^4 + 1.024y^5$$

5.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Ein Betrieb stellt aus 3 Rohstoffen 2 Zwischenprodukte und daraus wiederum 3 Endprodukte her.

Der Gesamtverbrauch der Rohstoffe wird durch folgende Matrix dargestellt:

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 9 & 10 & 12 \\ 7 & 10 & 16 \end{pmatrix}$$

a) Wie viele Rohstoffe sind notwendig, damit 5 ME von E_1 , 8 ME von E_2 und 12 ME von E_3 hergestellt werden können?

Lösung:

$$M_{RE} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 9 & 10 & 12 \\ 7 & 10 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 269 \\ 307 \end{pmatrix}$$

c) Die drei Endprodukte werden in einem Mengenverhältnis von 4:2:1 hergestellt; vom Rohstoff R_1 sind 1040 ME auf Lager.

Wie viele der jeweiligen Endprodukte können hergestellt werden und welche Rohstoffmengen von R_2 und R_3 benötigt man, wenn das Lager am Ende leer sein soll?

Lösung:

$$Ansatz: \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 9 & 10 & 12 \\ 7 & 10 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4x \\ 2x \\ 1x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.040 \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 52x \\ 68x \\ 64x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.040 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 52x = 1.040 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow b = 1.360 \Rightarrow c = 1.280$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \begin{pmatrix} 4x & 2x & 1x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 40 & 20 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 können bei einem einen Lagerbestand an Rohstoffen von $R_1 = 170$, $R_2 = 205$ und von $R_3 = 215$ hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte?

Anmerkung: Wählen Sie z als freie Variable!

<u>Lösung:</u>

$$\text{Ansatz}: \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 9 & 10 & 12 \\ 7 & 10 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 205 \\ 215 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauß–Verfahren}]{\text{Lösung mittels}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-5 \\ -3z+25 \\ z \end{pmatrix}$$

mögliche Vorgehensweise beim Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 + 12x_3 &= 170 \quad (1) \\ 9x_1 + 10x_2 + 12x_3 &= 205 \quad (2) \\ 7x_1 + 10x_2 + 16x_3 &= 215 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4/3\,x_2 + 2x_3 &= 85/3 \quad (1) \\ 9x_1 + 10x_2 + 12x_3 &= 205 \quad (2) \\ 7x_1 + 10x_2 + 16x_3 &= 215 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4/3\,x_2 + 2x_3 &= 85/3 \quad (1) \\ -2x_2 - 6x_3 &= -50 \quad (2) \\ 7x_1 + 10x_2 + 16x_3 &= 215 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4/3\,x_2 + 2x_3 &= 85/3 \quad (1) \\ -2x_2 - 6x_3 &= -50 \quad (2) \\ 2/3\,x_2 + 2x_3 &= 50/3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4/3\,x_2 + 2x_3 &= 85/3 \quad (1) \\ x_2 + 3x_3 &= 25 \quad (2) \\ 2/3\,x_2 + 2x_3 &= 50/3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 &= -5 \quad (1) \\ x_2 + 3x_3 &= 25 \quad (2) \\ 2/3\,x_2 + 2x_3 &= 50/3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 &= -5 \quad (1) \\ x_2 + 3x_3 &= 25 \quad (2) \\ 0 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar

$x_1 = -5 + 2x_3$

$x_2 = 25 - 3x_3$

x_3 beliebig wählbar