Klausur: Mathematik am Dienstag, den 22. März 2011

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht grafikfähiger Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die zwei stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2}x^4 - 2x + \frac{1}{3}y^3 - 4y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.
Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

<u>Lösung:</u>

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3 - 2 \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

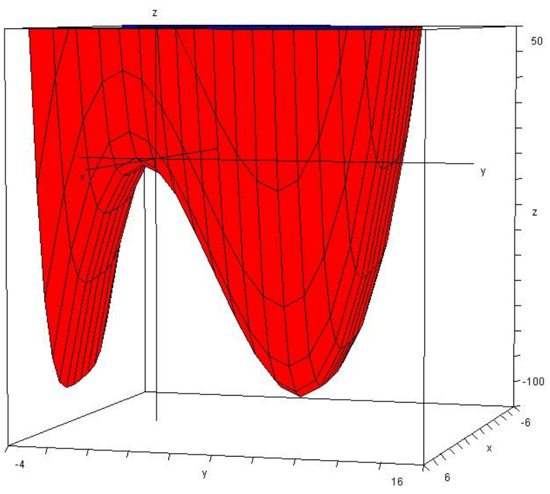
$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 - 8y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y(y-8) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0 \quad \wedge \quad y_2 = 8$$

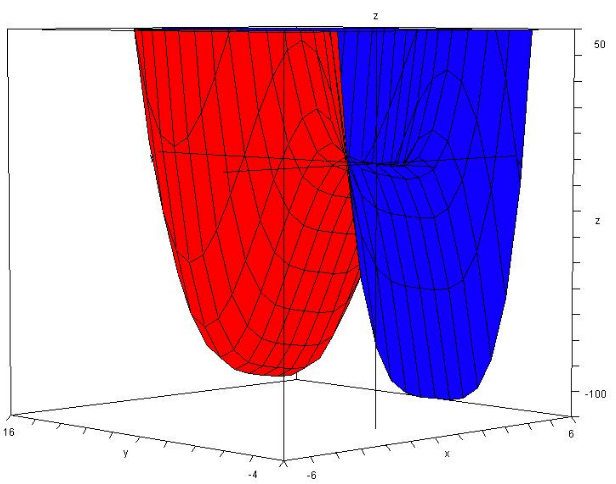
Es resultieren zwei stationäre Stellen: $S_1\left(1 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right)$ *und* $S_2\left(1 \,\middle|\, 8 \,\middle|\, -\frac{521}{6}\right)$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 6x^2 & 0 \\ 0 & 2y-8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_1}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -48 < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_2}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = 6 > 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 48 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(1 \,\middle|\, 8 \,\middle|\, -\frac{521}{6}\right)$$





2.) **Newton-Iteration**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 6$

auf eine mögliche Nullstelle im Intervall I = [1 ; 2].

Führen Sie **zwei** Iterationsschritte durch!

Lösung: **x = 1 (Startwert)**

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	-4	5	1.8
1	1.8	3.072	13.32	1.5693693
2	1.5693693	0.328151766	10.527499	1.5381984
3	1.5381984	0.0055158586	10.174560	1.5376563

x = 2 (Startwert)

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	6	16	1.625
1	1.625	0.931640625	11.171875	1.541608391
2	1.541608391	0.040275773	10.2128860	1.537664768

3.) **Lineare Gleichungssysteme**

a) Lösen Sie das LGS mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ -40 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 31 & -3 & 5 \\ 22 & 1 & 6 \\ -40 & 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{118}{59} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 31 & 5 \\ 4 & 22 & 6 \\ -1 & -40 & -2 \end{vmatrix}}{59} = \frac{-236}{59} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 31 \\ 4 & 1 & 22 \\ -1 & 8 & -40 \end{vmatrix}}{59} = \frac{177}{59} = 3$$

b) Für welche Werte von **t** hat das LGS eine **eindeutige** Lösung?

$$\begin{pmatrix} 1 & -2t & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -t & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2t & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -t & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2+4t^2+2-(-2t)-2-4t$$

$$\rightarrow \quad 4t^2-2t-2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \frac{2 \pm 6}{8}$$

$$\rightarrow \quad t_1 = 1 \wedge t_2 = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad t \in \Re \setminus \left\{-\frac{1}{2};1\right\}$$

4.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) \;=\; 2x^{0,25}y^{0,75}$

Die Kostenfunktion $k(x,y) \;=\; 3x+5y$ Das Budget beträgt insgesamt 2.600,00 €.

Bestimmen Sie das optimale Produktionsergebnis q_{max} .

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \;=\; 2x^{0,25}y^{0,75}+\lambda(2.600-3x-5y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}}-3\lambda \;\overset{!}{=}\; 0 \;\Rightarrow\; \lambda \;=\; \frac{1}{6}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \;=\; \frac{3}{2}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}}-5\lambda \;\overset{!}{=}\; 0 \;\Rightarrow\; \lambda \;=\; \frac{3}{10}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} \;=\; \frac{3}{10}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \;\Rightarrow\; y \;=\; \frac{9}{5}x$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$2.600 \;=\; 3x+5y \;\xrightarrow{y \;=\; \frac{9}{5}x}\; 2.600 \;=\; 3x+5\cdot\frac{9}{5}x$$

$$\Rightarrow\; 2.600 \;=\; 12x \;\Rightarrow\; x=216\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; y=390$$

$$\Rightarrow\; q\left(216\frac{2}{3}\;\middle|\;390\right) \;=\; 2\cdot\left(216\frac{2}{3}\right)^{0,25}\cdot 390^{0,75} \;\approx\; 673,40$$

5.) **Rechentechnik**

a) Ermitteln Sie den Wert der Summe:

$$\sum_{k=0}^{100}\left(k^2-4k+3\right) \quad + \quad \sum_{k=1}^{101}\left(2k+8\right)$$

Anmerkung: Bitte mind. 4 Zwischenschritte angeben

Lösung:

Variante mit Abspaltung von Summanden:

$$\sum_{k=0}^{100}\left(k^2-4k+3\right) \quad + \quad \sum_{k=1}^{101}\left(2k+8\right) \xrightarrow{\textit{Abspaltung}}$$

$$3 \quad + \quad \sum_{k=1}^{100}\left(k^2-4k+3\right) \quad + \quad \sum_{k=1}^{100}\left(2k+8\right) \quad + \quad 210 \quad =$$

$$\sum_{k=1}^{100}\left(k^2-2k+11\right) \quad + \quad 213 \quad =$$

$$\sum_{k=1}^{100}k^2-2\sum_{k=1}^{100}k+\sum_{k=1}^{100}11 \quad + \quad 213 \quad =$$

$$\frac{100\cdot101\cdot201}{6}-2\cdot\frac{100\cdot101}{2}+11\cdot100 \quad + \quad 213 \quad =$$

$$338.350-10.100+1.100 \quad + \quad 213 \quad = \quad 329.563$$

Variante mit Indexverschiebung:

$$\sum_{k=0}^{100}\left(k^2-4k+3\right) \quad + \quad \sum_{k=1}^{101}\left(2k+8\right) \xrightarrow{\textit{Indexverschiebung}}$$

$$\sum_{k=0}^{100}\left(k^2-4k+3\right) \quad + \quad \sum_{k=0}^{100}\left[2\left(k+1\right)+8\right] \quad =$$

$$\sum_{k=0}^{100}\left(k^2-4k+3\right) \quad + \quad \sum_{k=0}^{100}\left(2k+10\right) \quad =$$

$$\sum_{k=0}^{100}\left(k^2-2k+13\right) \quad = \quad \sum_{k=0}^{100}k^2-2\sum_{k=0}^{100}k+\sum_{k=0}^{100}13 \quad =$$

$$\frac{100\cdot101\cdot201}{6}-2\cdot\frac{100\cdot101}{2}+13\cdot\color{red}{101} \quad =$$

$$338.350-10.100+1.313 \quad = \quad 329.563$$

b) Bilden Sie die Entwicklung nach dem Binomischen Lehrsatz und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich: $\left(2x-\frac{1}{4}\right)^5$

Lösung:

$$\left(2x-\frac{1}{4}\right)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^0+\binom{5}{1}(2x)^4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^1+\binom{5}{2}(2x)^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$+\binom{5}{3}(2x)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\binom{5}{4}(2x)^1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^4+\binom{5}{5}(2x)^0\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^5$$

$$\left(2x-\frac{1}{4}\right)^5 = 32x^5-20x^4+5x^3-\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{128}x-\frac{1}{1.024}$$

6.) **Extrema und Ortskurven**

Gegeben Sie folgende Funktion:

$$f_k(x) = -\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{4}k^2x \quad mit\ k\neq 0$$

a) Zeigen Sie, dass die **Extremwertstellen** bei $|x| = \frac{3}{2}k$ liegen.

Bitte mit vollständigem Nachweis (hinreichende Bedingung).

Lösung:

$$f_k'(x) = -x^2+\frac{9}{4}k^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}k^2 \Rightarrow |x| = \frac{3}{2}k$$

$$f_k''(x) = -2x \xrightarrow{einsetzen} f_k''\left(\pm\frac{3}{2}k\right) = -2\cdot\left(\pm\frac{3}{2}k\right) \neq 0$$

b) Bestimmen Sie die **Ortskurve** der Extremwerte.

Lösung:

$$|x| = \frac{3}{2}k \rightarrow |k| = \frac{2}{3}x \xrightarrow{einsetzen}$$

$$y = -\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)^2 x = -\frac{1}{3}x^3+x^3 = \frac{2}{3}x^3$$