Klausur: Mathematik am Freitag, den 22.03.2013

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht grafikfähiger Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) Extrema ohne Nebenbedingungen | 18 | |

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) \;=\; 2x + y - \frac{1}{3}x^3 - xy - y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

Lösung:

$$f(x,y) \;=\; 2x + y - \frac{1}{3}x^3 - xy - y^2$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 - x^2 - y \overset{!}{=} 0 \quad\rightarrow\quad y = 2 - x^2$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - x - 2y \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad 1 - x - 2\left(2 - x^2\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow\quad x_1 = \frac{3}{2} \xrightarrow{y=2-x^2} y_1 = -\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad x_2 = -1 \xrightarrow{y=2-x^2} y_2 = 1$$

Es resultieren zwei stationäre Stellen:

$$S_1\left(\frac{3}{2}\;\middle|\;-\frac{1}{4}\;\middle|\;f_1\right) \quad;\quad S_2\left(-1\,|\,1\,|\,f_2\right)$$

$$Hesse-Matrix:\quad H(f) = \begin{pmatrix} -2x & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad H(f_{S_1}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad f_{xx} = -3 < 0 \;\wedge\; \det(H) = 5 > 0 \quad\Rightarrow\quad Max\left(\frac{3}{2}\;\middle|\;-\frac{1}{4}\;\middle|\;f_1\right)$$

$$\Rightarrow\quad H(f_{S_2}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(H) = -3 < 0 \quad\Rightarrow\quad Sattelpunkt$$

2.) Ableitungen | 12 | |

Bilden Sie jeweils die erste partielle Ableitung nach jeder Variablen:

$$f(x,y,z) \;=\; e^{4y} - x^2 y + x^3 z^2$$

Lösung:

$$f_x(x,y,z) \;=\; -2xy + 3x^2 z^2 \qquad\qquad f_y(x,y,z) \;=\; 4e^{4y} - x^2$$

$$f_z(x,y,z) \;=\; 2x^3 z$$

3.) Optimum mit Nebenbedingungen | 17 | |

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) \;=\; \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}y$

Die Nebenbedingung lautet: $NB:\; y - x \leq 1$

Bestimmen Sie das maximal mögliche Ergebnis f_{max} .

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \;=\; \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}y + \lambda(1 + x - y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \;=\; \frac{2}{3} - x + \lambda \;\overset{!}{=}\; 0 \;\Rightarrow\; \lambda \;=\; x - \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \;=\; \frac{1}{12} - \lambda \;\overset{!}{=}\; 0 \;\Rightarrow\; \lambda \;=\; \frac{1}{12}$$

$$Austauschverhältnis:$$

$$x - \frac{2}{3} \;=\; \frac{1}{12} \;\Rightarrow\; x \;=\; \frac{3}{4} \xrightarrow{y-x=1} y \;=\; \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow\quad f\left(\frac{3}{4}\;\middle|\;\frac{7}{4}\right) \;=\; \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16} + \frac{1}{12}\cdot\frac{7}{4} \;=\; \frac{35}{96}$$

4.) **Rechnen mit Matrizen** | 15 | |

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) **A – 3B** b) **(A + B) * C** c) **A * B^T**

Lösung:

a) $$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ -5 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 21 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 40 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

5.) **Lineare Gleichungssysteme und deren Lösungsverhalten** | 18 | |

Gegeben seine die Matrix A_k und die Spaltenmatrix b_k :

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ k & k & 6 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b_k} = \begin{pmatrix} -8 \\ k^2 - 9k - 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Determinante von A_k folgende Form annimmt:

$$Det(A_k) = -k^3 + 7k - 6$$

b) Geben Sie an, für welche Werte von k, das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b_k}$ eindeutig, mehrdeutig und lösbar ist.

c) Lösen Sie das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b_k}$ für **k = -3** mit y als freier Variable.

Lösung:

a) Sarrus-Regel $Det(A_k) = -k^3 + 7k - 6$

b) eindeutig lösbar: $k \in \Re \setminus \{-3; 1; 2\}$

unlösbar: $k \in \{1; 2\}$ mehrdeutig lösbar: $k = (-3)$

c) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 - 9y \\ y \\ -1 - 4y \end{pmatrix} \quad mit\ y \in \Re$$

6.) **Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung** | 20 | |

Gegeben seien die PAF mit p(x) und die Kostenfunktion mit k(x):

$$p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 16 \quad \text{und} \quad k(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + x + 28$$

Berechnen Sie

a) die Erlös- bzw. Umsatzfunktion.

b) die Gewinnfunktion.

c) die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

d) Zeigen Sie, dass das Umsatzmaximum und das Gewinnmaximum bei verschiedenen Mengen erreicht werden.

Lösung:

a) $$e(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + 16\right) \cdot x = -\frac{1}{4}x^3 + 16x$$

b) $$g(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 16x - \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + x + 28\right) = -\frac{3}{4}x^3 + x^2 + 15x - 28$$

c) Gewinnschwelle: $(2 \mid 30)$ Gewinngrenze: $(4 \mid 48)$

d) $$u'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 16 = 0 \rightarrow x = 4,62$$

$$g'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 2x + 15 = 0 \rightarrow x = 3,06$$