Klausur: Mathematik am Dienstag, 28.03.2017

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) Summenzeichen **10** |

Ermitteln Sie die Summanden der dargestellten algebraischen Summen:

a) $$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k \cdot k^3$$

b) $$\sum_{k=1}^{3}\sum_{z=2}^{4} 2z + k^2$$

2.) Ableitungen **15** |

Bilden Sie jeweils die erste partielle Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $$f(x,y) = \left(x^2 - 3y\right)^4 + y^3 + x^5 - 3$$

b) $$f(x,y,z) = y^2 \cdot e^{x^4} + e^{2x-4y+5z} - x \cdot y \cdot z$$

3.) Extrema ohne Nebenbedingungen I **20** |

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \left(x^2 - 4\right)^2 + 512y - 2y^4$$

Bestimmen Sie die stationären Stellen und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.

Berechnen Sie (nur) für die Extrema auch die zugehörigen Funktionswerte.

4.) Extrema ohne Nebenbedingungen II

15	

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + \frac{1}{3}y^3 - 4(3z-6)^2$$

Bestimmen Sie die stationären Stellen und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.
Eine Berechnung der zugehörigen Funktionswerte muss **nicht** erfolgen!

5.) Extrema unter Nebenbedingungen

25	

a) Berechnen Sie das Optimum der Funktion

$$f(x,y) = 5x^{0,7}y^{0,3}$$

unter folgender Nebenbedingung: $21x + 15y \leq 6.000$

b) Bestimmen Sie auch den zugehörigen Funktionswert der Funktion $f(x,y)$

c) Ermitteln Sie den Wert des Lagrangeparameters im Optimum und erläutern Sie dessen ökonomische Aussagekraft im Rahmen der Aufgabenstellung, wenn das Budget um 100 GE erhöht würde.

6.) Übergangsmatrizen und Rechenoperationen mit Matrizen

15	

Auf einem Markt konkurrieren zwei Produkte A und B. Auf Grund diverser Erhebungen von seriösen Marktforschungsinstituten lässt sich ein Wechselverhalten der Konsumenten von einer Woche zur nächsten Woche entsprechend folgender Matrix rekonstruieren:

$$U = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Die anfänglichen Marktanteile der Produkte stehen im Verhältnis von 1 : 3

a) Wie werden sich die Marktanteile in den kommenden beiden Wochen entwickeln?

b) Wie waren die Marktanteile eine Woche zuvor?

c) Bei welcher Verteilung entsteht ein Markt im Zustand des Gleichgewichts, so dass trotz Übergängen die Anteile konstant bleiben?

Lösungen:

1.) Summenzeichen

Ermitteln Sie die Summanden der dargestellten algebraischen Summen:

a) $$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k \cdot k^3 = 0-1+8-27+64-125$$

b) $$\sum_{k=1}^{3}\sum_{z=2}^{4} 2z+k^2 = \sum_{k=1}^{3} 4+k^2+6+k^2+8+k^2$$

$$= (4+1+6+1+8+1)+(4+4+6+4+8+4)$$
$$+(4+9+6+9+8+9)$$

2.) Ableitungen

Bilden Sie jeweils die erste partielle Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $$f(x,y) = (x^2-3y)^4+y^3+x^5-3$$

$$f_x(x,y) = 4(x^2-3y)^3\cdot 2x+5x^4 = 8x\cdot(x^2-3y)^3+5x^4$$

$$f_y(x,y) = 4(x^2-3y)^3\cdot(-3)+3y^2 = (-12)\cdot(x^2-3y)^3+3y^2$$

b) $$f(x,y,z) = y^2\cdot e^{x^4}+e^{2x-4y+5z}-x\cdot y\cdot z$$

$$f_x(x,y,z) = y^2\cdot e^{x^4}\cdot 4x^3+2\cdot e^{2x-4y+5z}-1\cdot y\cdot z$$

$$f_y(x,y,z) = 2y\cdot e^{x^4}-4\cdot e^{2x-4y+5z}-x\cdot 1\cdot z$$

$$f_z(x,y,z) = 5\cdot e^{2x-4y+5z}-x\cdot y\cdot 1$$

3.) Extrema ohne Nebenbedingungen I

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \left(x^2-4\right)^2 + 512y - 2y^4$$

Bestimmen Sie die stationären Stellen und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.

Berechnen Sie (nur) für die Extrema auch die zugehörigen Funktionswerte.

$$f_x(x,y) = 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \vee x_{2/3} = \pm 2$$

$$f_y(x,y) = 512 - 8y^3 = 0 \rightarrow y = 4$$

$$S_1(0 \mid 4 \mid 1.552) \quad S_2(-2 \mid 4 \mid f_2) \quad S_3(2 \mid 4 \mid f_3)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2-16 & 0 \\ 0 & -24y^2 \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -384 \end{pmatrix} \rightarrow \det(H) > 0 \wedge f_{xx} < 0 \rightarrow \textit{negativ definit} \rightarrow \textit{Max}$$

$$H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -384 \end{pmatrix} \rightarrow \det(H) < 0 \rightarrow \textit{indefinit} \rightarrow \textit{SP}$$

$$H_{S_3}(f) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -384 \end{pmatrix} \rightarrow \det(H) < 0 \rightarrow \textit{indefinit} \rightarrow \textit{SP}$$

4.) Extrema ohne Nebenbedingungen II

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y,z) \quad = \quad 2x^2 - 4xy + \frac{1}{3}y^3 - 4(3z-6)^2$$

Bestimmen Sie die stationären Stellen und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.
Eine Berechnung der zugehörigen Funktionswerte muss **<u>nicht</u>** erfolgen!

$$f(x,y,z) \quad = \quad 2x^2 - 4xy + \frac{1}{3}y^3 - 4(3z-6)^2$$

$$f_x(x,y,z) \quad = \quad 4x - 4y \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x \quad = \quad y$$

$$f_y(x,y,z) \quad = \quad -4x + y^2 \quad = \quad 0 \quad \xrightarrow{x=y} \quad -4x + x^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_1 = 4 \quad \rightarrow \quad y_1 = 0 \quad \vee \quad y_1 = 4$$

$$f_z(x,y,z) \quad = \quad -24(3z-6) \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad z \quad = \quad 2$$

$$S_1(0 \mid 0 \mid 2 \mid f_1) \quad und \quad S_2(4 \mid 4 \mid 2 \mid f_2)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left. \begin{array}{c} f_{xx} = 4 > 0 \\ Det\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -16 < 0 \end{array} \right\} indefinit \rightarrow SP$$

$$H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left. \begin{array}{c} f_{xx} = 4 > 0 \\ Det\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = 16 > 0 \\ Det\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{pmatrix} = -72 \cdot 16 < 0 \end{array} \right\} indefinit \rightarrow SP$$

5.) Extrema unter Nebenbedingungen

a) Berechnen Sie das Optimum der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad 5x^{0,7}y^{0,3}$$

unter folgender Nebenbedingung: $21x+15y \quad \leq \quad 6.000$

b) Bestimmen Sie auch den zugehörigen Funktionswert der Funktion $f(x,y)$

c) Ermitteln Sie den Wert des Lagrangeparameters im Optimum und erläutern Sie dessen ökonomische Aussagekraft im Rahmen der Aufgabenstellung, wenn das Budget um 100 GE erhöht würde.

$$L(x,y,k) \quad = \quad 5x^{0,7}y^{0,3}+k(6.000-21x-15y)$$

$$L(x,y,k) \quad = \quad 3,5\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}-21k \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}} \quad = \quad k$$

$$L(x,y,k) \quad = \quad 1,5\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}-15k \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{10}\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}} \quad = \quad k$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}} \quad = \quad \frac{1}{10}\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}} \quad \rightarrow \quad y \quad = \quad 0,6x \quad \xrightarrow{NB} \quad x=200 \wedge y=120$$

$$f(200;120) \quad = \quad 5\cdot 200^{0,7}\cdot 120^{0,3} \quad = \quad 857,92$$

$$k=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{200}{120}\right)^{0,7}=0,143 \quad \xrightarrow{+\Delta 100} \quad \Delta f=14,3\,[ME]$$

6.) Übergangsmatrizen und Rechenoperationen mit Matrizen

Auf einem Markt konkurrieren zwei Produkte A und B. Auf Grund diverser Erhebungen von seriösen Marktforschungsinstituten lässt sich ein Wechselverhalten der Konsumenten von einer Woche zur nächsten Woche entsprechend folgender Matrix rekonstruieren:

$$U = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Die anfänglichen Marktanteile der Produkte stehen im Verhältnis von 1 : 3

a) Wie werden sich die Marktanteile in den kommenden beiden Wochen entwickeln?

b) Wie waren die Marktanteile eine Woche zuvor?

c) Bei welcher Verteilung entsteht ein Markt im Zustand des Gleichgewichts, so dass trotz Übergängen die Anteile konstant bleiben?

$$U = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = U \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_3 = U \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4625 \\ 0,5375 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_1 = U \cdot \vec{p}_0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,0714 \\ 0,9286 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = U \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{0} = (U - E) \cdot \vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x = 2y \quad und \quad x + y = 1 \rightarrow \vec{x} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$