Klausur: Mathematik am Dienstag, den 28. März 2011

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht grafikfähiger Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die zwei stationären Stellen der Funktion

$$f\left(x,y\right) \quad = \quad x^3+y^3-9xy+27$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.
Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

Lösung:

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-9y\stackrel{!}{=}0 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{3}x^2$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-9x\stackrel{!}{=}0 \quad\xrightarrow{y=\frac{1}{3}x^2}\quad 3\left(\frac{1}{3}x^2\right)^2-9x=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}x^4-9x=0$$

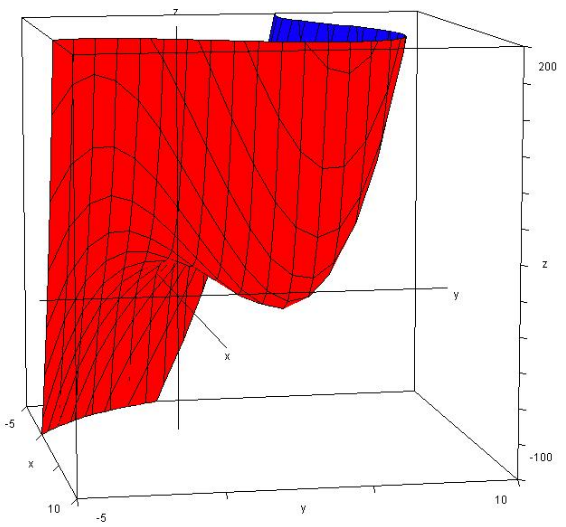
$$\Rightarrow\quad x\left(\frac{1}{3}x^3-9\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0 \quad\wedge\quad x_2=3 \quad\Rightarrow\quad y_1=0 \quad\wedge\quad y_2=3$$

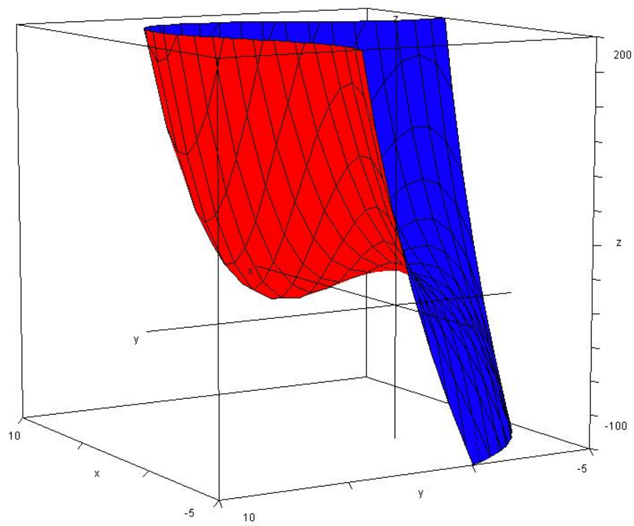
Es resultieren zwei stationäre Stellen: $S_1\left(0\mid 0\mid 27\right)$ *und* $S_2\left(3\mid 3\mid 0\right)$

$$Hesse-Matrix:\quad H\left(f\right)=\begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad H\left(f_{S_1}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det\left(H\right)=-81<0 \quad\Rightarrow\quad Sattelpunkt$$

$$\Rightarrow\quad H\left(f_{S_2}\right)=\begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad f_{xx}=18>0 \quad\wedge\quad \det\left(H\right)=243>0 \quad\Rightarrow\quad Min\left(3\mid 3\mid 0\right)$$





2.) **Newton-Iteration**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 - 6$

auf eine mögliche Nullstelle im Intervall I = [1 ; 2].

Führen Sie **zwei** Iterationsschritte durch!

Lösung:

x = 1 (Startwert)

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	-5	4	2.25
1	2.25	11.71875	25.875	1.7971014
2	1.7971014	2.378169243	15.7832388	1.64642456
3	1.64642456	0.2152578927	12.9714339	1.62982980

x = 2 (Startwert)

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	6	20	1.7
1	1.7	0.936	13.94	1.63285509
2	1.632855	0.040872	12.731584	1.62964479

3.) **Lineare Gleichungssysteme**

a) Lösen Sie das LGS mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{-1} = 9 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-6}{-1} = 6$$

b) Für welche Werte von **t** hat das LGS eine **eindeutige** Lösung?

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ -2 & -t & 1 \\ 2t & 3t^2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1 & t & 2 \\ -2 & -t & 1 \\ 2t & 3t^2 & 9 \end{vmatrix} = -9t + 2t^2 - 12t^2 - \left(-4t^2\right) - 3t^2 - \left(-18t\right)$$

$$\rightarrow \quad -9t^2 + 9t = 0 \quad \rightarrow \quad 9t\left(-t+1\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad t_1 = 0 \ \wedge \ t_2 = 1 \quad \rightarrow \quad t \in \Re \setminus \{0;1\}$$

4.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei die Funktion

$$q(x,y) \quad = \quad x^2 - 40x - 2xy + y^2 - 20y$$

Bestimmen Sie ein Extremum unter der Nebenbedingung: $15 \quad = \quad x + y$

Bestimmen Sie den minimal möglichen Funktionswert q_{min} .

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad x^2 - 40x - 2xy + y^2 - 20y + \lambda(15 - x - y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 2x - 40 - 2y - \lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 2x - 40 - 2y$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \quad = \quad -2x + 2y - 20 - \lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 2y - 20 - 2x$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$2x - 40 - 2y \quad = \quad 2y - 20 - 2x \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad x - 5$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

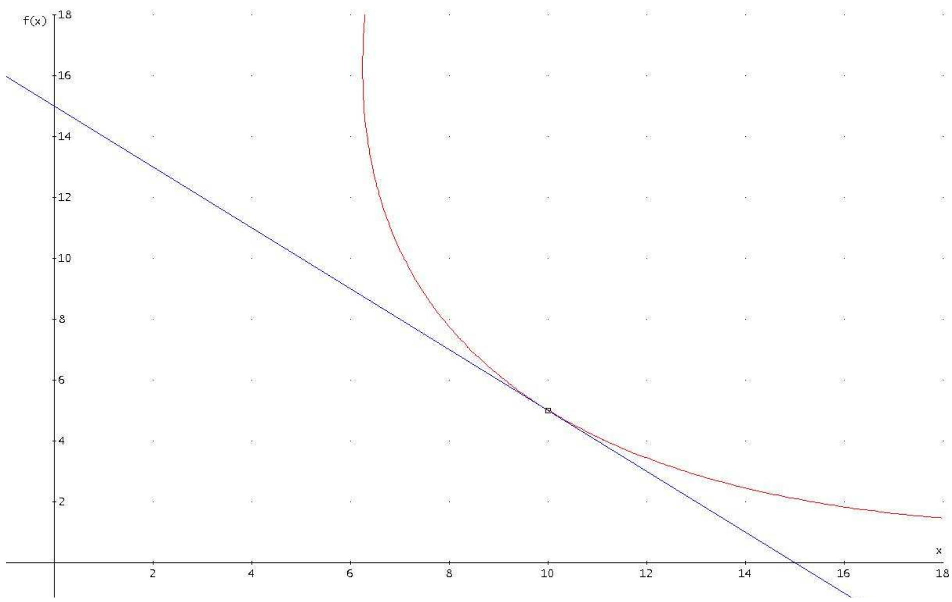
$$15 \quad = \quad x + y \quad \xrightarrow{y \;=\; x-5} \quad 15 \quad = \quad x + x - 5$$

$$\Rightarrow \quad 15 \quad = \quad 2x - 5 \quad \Rightarrow \quad x = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 5$$

$$\Rightarrow \quad q(10 \mid 5) \quad = \quad -475$$

Prüfung der erweiterten Hesse-Matrix:

$$\Rightarrow \quad H(L) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Minimum}$$



5.) **Rechentechnik**

a) Ermitteln Sie den Wert der Summe:

$$\sum_{k=0}^{100}\left(3k^2-10k\right) \quad - \quad \sum_{k=0}^{102}\left(2k+40\right)$$

Anmerkung: Bitte mind. 4 Zwischenschritte angeben

Lösung: **Variante mit Abspaltung von Summanden**

$$\sum_{k=0}^{100}\left(3k^2-10k\right) \quad - \quad \sum_{k=0}^{102}\left(2k+40\right) \xrightarrow{\text{Abspaltung}}$$

$$\sum_{k=0}^{100}\left(3k^2-10k\right) \quad - \quad \sum_{k=0}^{100}\left(2k+40\right) \quad - \quad 242 \quad - \quad 244 \quad =$$

$$\sum_{k=0}^{100}\left(3k^2-12k-40\right) \quad - \quad 486 \quad =$$

$$3\sum_{k=0}^{100}k^2-12\sum_{k=0}^{100}k-\sum_{k=0}^{100}40 \quad - \quad 486 \quad =$$

$$3\cdot\frac{100\cdot101\cdot201}{6}-12\cdot\frac{100\cdot101}{2}-40\cdot101 \quad - \quad 486 \quad =$$

$$1.015.050-60.600-4.040 \quad - \quad 486 \quad = \quad 949.924$$

b) Bilden Sie die Entwicklung nach dem Binomischen Lehrsatz und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich:

$$\left(\frac{2}{3}x-6\right)^5$$

Lösung:

$$\left(\frac{2}{3}x-6\right)^5 \quad = \quad \binom{5}{0}\left(\frac{2}{3}x\right)^5\cdot(-6)^0+\binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}x\right)^4\cdot(-6)^1+\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}x\right)^3\cdot(-6)^2$$

$$+\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}x\right)^2\cdot(-6)^3+\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)^1\cdot(-6)^4+\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}x\right)^0\cdot(-6)^5$$

$$\left(\frac{2}{3}x-6\right)^5 \quad = \quad \frac{32}{243}x^5-\frac{160}{27}x^4+\frac{320}{3}x^3-960x^2+4.320x-7.776$$

6.) **Extrema und Ortskurven**

Gegeben sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad und \quad B_k = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 4 & 2k \end{pmatrix} \quad mit\ k \neq 0$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f_k(x) \quad = \quad \det(A \cdot B_k)$

folgendes Aussehen besitzt: $f_k(x) \quad = \quad 6x^2(k - 2x^2)$

Lösung:

$$Beh.: \quad f_k(x) \quad = \quad \det(A \cdot B_k)$$

$$Bew.:$$

$$f_k(x) \quad = \quad Det\left[\begin{pmatrix} 3x^2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 4 & 2k \end{pmatrix}\right] \quad = \quad 3x^2(2k - 4x^2) \quad = \quad 6x^2(k - 2x^2)$$

b) Bestimmen Sie die **Ortskurve** der Extremwerte, wenn bekannt ist,

dass zwei Extremwertstellen bei $|x| \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{k}$ liegen.

Lösung:

$$|x| \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{k} \quad \to \quad |k| \quad = \quad 4x^2 \quad \xrightarrow{einsetzen}$$

$$y \quad = \quad 6x^2(4x^2 - 2x^2) \quad = \quad 6x^2 \cdot 2x^2 \quad = \quad 12x^4$$