Klausur: Mathematik
am Mittwoch, 20. Januar 2016

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung (1 Variable) | 25 | |

Monopol-Max hat eine Superidee: Er möchte mit einem ultimativ einzigartigen Produkt den Markt erobern. Allerdings müssen hierfür noch einige grundlegende mathematische Berechnungen durchgeführt werden.
Zuerst wird eine Preis-Absatz-Funktion benötigt, die folgende Eigenschaften haben soll:

=> linearer Funktionstyp;
=> bei einem Absatzpreis von 10 GE/ME wird eine Absatzmenge von 24 realisiert;
=> bei einem Absatzpreis von 5 GE/ME kann man eine Absatzmenge von 44 ME erreichen.

Bezüglich der ebenfalls linearen Kostenfunktion rechnet Max mit Fixkosten von 80 GE; für die Produktion von 10 ME müsste er dann mit insgesamt 120 GE rechnen.

a) Wie lauten die PAF und Kostenfunktion?

Max hat mittels eigener Berechnung nun herausgefunden, dass die optimale PAF bei $p(x) = 60 - 2x$ liegt;

die Kostenfunktion musste er etwas spezifizieren, so dass diese nun mit

$K(x) = 2x^2 - 12x + 288$ angegeben ist.

b) Bestimmen Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze.

c) Zeigen Sie, dass das Erlösmaximum nicht mit dem Gewinnmaximum übereinstimmt.

d) Ermitteln Sie nun noch den Cournot-Punkt.

2.) Extrema ohne Nebenbedingungen

25	

Gegeben sei die Funktion

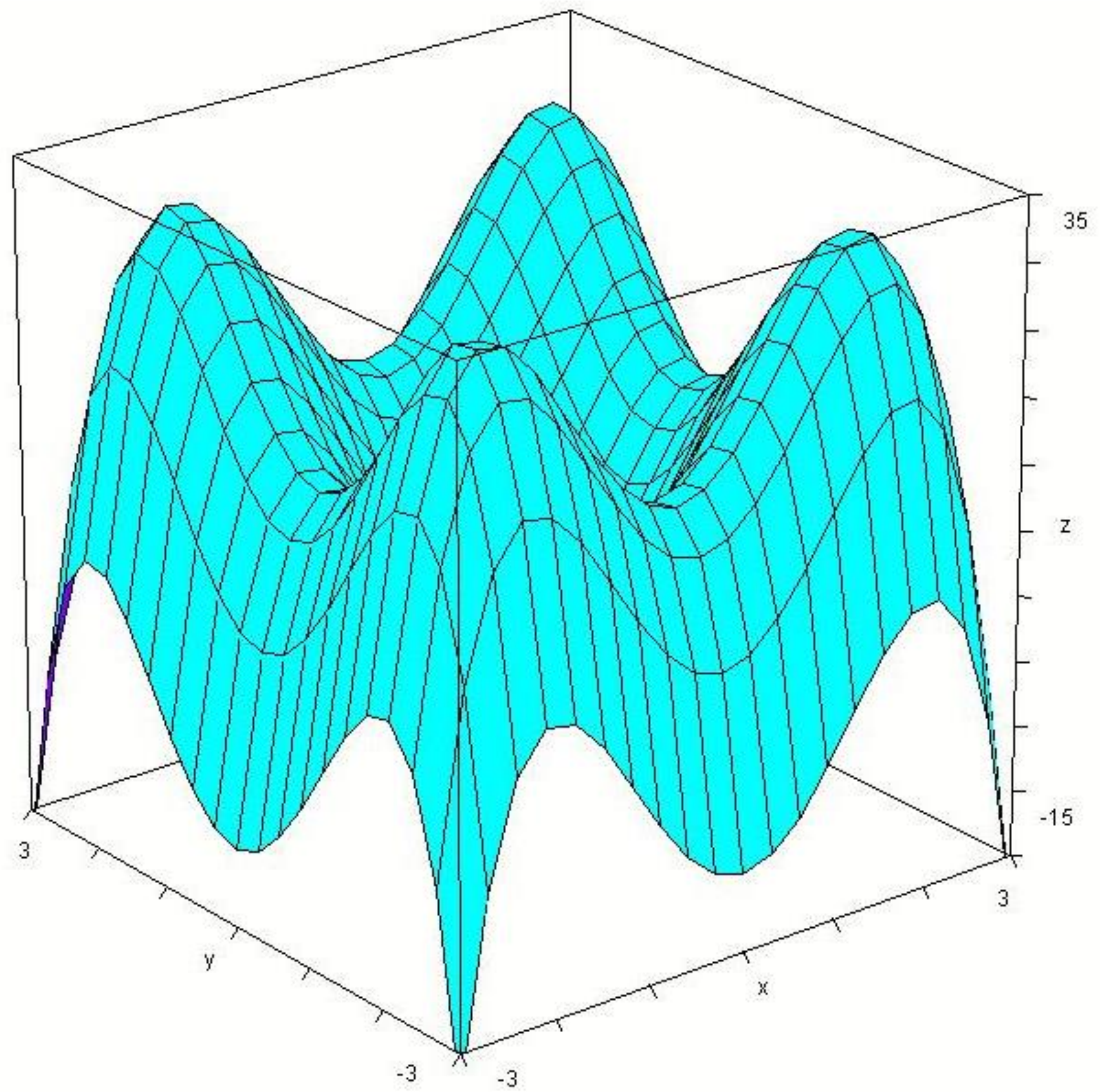
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 8x^2 - 8y^2$$

a) Bestimmen Sie die **neun** stationären Stellen und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.

b) Berechnen Sie (nur) für die Extrema auch die zugehörigen Funktionswerte.

c) Durch welche Eigenschaft der Funktion lässt sich bei der Berechnung in a) und b) viel Zeit sparen?

d) Die folgende Zeichnung der Funktion g(x,y) ist eine gegenüber der Funktion f(x,y) geringfügig abgeänderte Funktionsvorschrift.
Versuchen Sie die Funktion g(x,y) anzugeben und begründen Sie Ihre Aussage.



3.) Extrema unter Nebenbedingungen

25	

a) Berechnen Sie das Optimum der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad 2x^{0,55}y^{0,45}$$

unter folgender Nebenbedingung: $22x + 9y \quad \leq \quad 4.440$

b) Bestimmen Sie auch den zugehörigen Funktionswert der Funktion $f(x,y)$

c) Ermitteln Sie den Wert des Lagrangeparameters im Optimum und erläutern Sie dessen ökonomische Aussagekraft im Rahmen der Aufgabenstellung.

4.) Übergangsmatrizen

25	

Auf einem Markt konkurrieren drei Produkte A, B und C. Auf Grund diverser Erhebungen von seriösen Marktforschungsinstituten lässt sich ein Wechselverhalten der Konsumenten von einer Woche zur nächsten Woche entsprechend folgender Matrix rekonstruieren:

$$U = \begin{pmatrix} 0,6 & b & c \\ 0,2 & 0,7 & c \\ a & 2b & 0,8 \end{pmatrix}$$

Die anfänglichen Marktanteile der Produkte stehen im Verhältnis von 1 : 10 : 9

a) Wie werden sich die Marktanteile in den kommenden beiden Wochen entwickeln?

b) Zeigen Sie, dass keine Marktanteilsberechnung für eine Woche zuvor möglich ist. Begründen Sie dies aufgrund mathematischer Ergebnisse.

c) Bei welcher Verteilung entsteht ein Markt im Zustand des Gleichgewichts, so dass trotz Übergängen die Anteile konstant bleiben?

5.) Matrizen bzw. LGS und deren Lösungsverhalten

Teil 1:

Zur Herstellung von drei Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 werden in einem Unternehmen drei Rohstoffe R_1, R_2, und R_3 benötigt.
Aus den Zwischenprodukten werden zwei Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt.

Der Bedarf an Rohstoffen und Zwischenprodukten (in ME) zur Herstellung von jeweils einer ME auf der nachgelagerten Produktionsstufe kann den folgenden Darstellungsformen entnommen werden.

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad M_{EZ} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Wie hoch ist der Bedarf an Rohstoffen, um von den Endprodukten die gewünschte

Anzahl herzustellen: $\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Teil 2:

Gegeben sei folgendes LGS:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & az & = & a \\ x & + & y & + & (a+1)z & = & a+2 \end{array}$$

a) Geben Sie an, für welche Werte von **a** das LGS

(i) eindeutig lösbar,

(ii) mehrdeutig lösbar und

(iii) unlösbar ist.

b) Lösen Sie das System für **a = 1**.

Lösungen:

Aufgabe 1:

PAF: p(x) = mx + b

$$p(x) = mx+b$$

$$\left.\begin{aligned} 10 &= 24m+b \\ 5 &= 44m+b \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad 5=-20m \quad \rightarrow \quad m=-\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad b=16$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = -\frac{1}{4}x+16$$

Kostenfunktion: K(x) = 4x + 80

Gewinnfunktion:

$$K(x) = 2x^2-12x+288$$

$$p(x) = 60-2x$$

$$g(x) = x\cdot p(x)-K(x) = 60x-2x^2-2x^2+12x-288 = -4x^2+72x-288$$

Nullstellen: Gewinnschwelle und Gewinngrenze:

$$\rightarrow \quad x_1=6\left[\text{Gewinnschwelle}\right] \quad und \quad x_2=12\left[\text{Gewinngrenze}\right]$$

Gewinnmaximum versus Erlösmaximum

Gewinnmaximum:

$$g(x) = -4x^2+72x-288 \quad \rightarrow \quad g'(x) = -8x+72=0 \quad \rightarrow \quad x = 9$$

$$g''(x) = -8<0 \quad \rightarrow \quad G_{\max}\ bei\ x=9$$

Erlösmaximum:

$$U(x) = 60x-2x^2 \quad \rightarrow \quad U'(x) = 60-4x=0 \quad \rightarrow \quad x = 15$$

$$U''(x) = -4<0 \quad \rightarrow \quad U_{\max}\ bei\ x=15$$

Cournotpunkt: Punkt auf der PAF im Gewinnmaximum

C(9 / p(9)) => C(9 / 42)

Aufgabe 2:

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2 \wedge x_3 = -2$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 - 16y = 0 \rightarrow y_1 = 0 \wedge y_2 = 2 \wedge y_3 = -2$$

Es liegen neun stationäre Stellen vor, wobei aufgrund der Achsensymmetrien bzw. der geraden Hochzahlen nur eingeschränkt geprüft werden muss.

$$S_1(0 \quad 0 \quad 0) \quad S_{2-5}(\pm 2 \quad \pm 2 \quad -32) \quad S_{6-7}(0 \quad \pm 2 \quad -16) \quad S_{8-9}(\pm 2 \quad 0 \quad -16)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 16 \end{pmatrix}$$

$$S_1(0 \quad 0 \quad 0) \rightarrow H \text{ negativ definit} \rightarrow Max(0 \quad 0 \quad 0)$$

$$S_{2-5}(\pm 2 \quad \pm 2 \quad -32) \rightarrow H \text{ positiv definit} \rightarrow Min(\pm 2 \quad \pm 2 \quad -32)$$

$$S_{6-7}(0 \quad \pm 2 \quad -16) \rightarrow H \text{ indefinit} \rightarrow Sattelpunkt(0 \quad \pm 2 \quad -16)$$

$$S_{8-9}(\pm 2 \quad 0 \quad -16) \rightarrow H \text{ indefinit} \rightarrow Sattelpunkt(\pm 2 \quad 0 \quad -16)$$

Die Funktion g(x,y) ist gespiegelt zur xy-Ebene und hat daher die Funktionsvorschrift:

$$g(x,y) = -x^4 - y^4 + 8x^2 + 8y^2 = -f(x,y)$$

Aufgabe 3: Lagrangeansatz:

$$L(x,y,\lambda) = 2x^{0,55}y^{0,45} + \lambda(4.440 - 22x - 9y)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x(x,y,\lambda) = 1{,}1\dfrac{y^{0,45}}{x^{0,45}} - 22\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{20}\dfrac{y^{0,45}}{x^{0,45}} \\[2ex] L_y(x,y,\lambda) = 0{,}9\dfrac{x^{0,55}}{y^{0,55}} - 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{10}\dfrac{x^{0,55}}{y^{0,55}} \end{array}\right\} y = 2x$$

$$in\ NB: \quad 22x + 9 \cdot 2x = 4.440 \rightarrow x = 111 \rightarrow y = 222$$

$$f(111, 222) = 2 \cdot 111^{0,55} \cdot 222^{0,45} = 2^{0,45} \cdot 222 \approx 303,2609$$

$$\lambda = \frac{1}{20} \cdot \frac{222^{0,45}}{111^{0,45}} = \frac{1}{20} \cdot 2^{0,45} \approx 0,0683$$

Die Erhöhung des Budgets um eine Geldeinheit führt zu einer Erhöhung des Outputs von 0,0683 ME bzw. Produktionseinheiten.

Aufgabe 4:

$$U = \begin{pmatrix} 0,6 & b & c \\ 0,2 & 0,7 & c \\ a & 2b & 0,8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,50 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

Die beiden Zustände in den folgenden Wochen:

$$\vec{p}_2 = U \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,50 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,405 \\ 0,470 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_3 = U \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,405 \\ 0,470 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1625 \\ 0,3555 \\ 0,4820 \end{pmatrix}$$

Unmöglichkeit eines Zustandes:

$$\vec{p}_1 = U \cdot \vec{p}_0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,50 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} -6 \\ 41 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Statisches Gleichgewicht:

$$\vec{x} = U \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{0} = (U - E) \cdot \vec{x}$$

$$\xrightarrow{inkl.\,Eins-Zeile} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Teil 1:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.290 \\ 2.710 \\ 2.260 \end{pmatrix}$$

Teil 2:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & az & = & a \\ x & + & y & + & (a+1)z & = & a+2 \end{array}$$

$$Det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} = a^2 - a \overset{!}{=} 0 \rightarrow a_1 = 0 \wedge a_2 = 1$$

Probe 1: $a = 0$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \xrightarrow{III-I} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \rightarrow \quad unlösbar \end{array}$$

Probe 2: $a = 1$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \xrightarrow{II-I} \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \xrightarrow{III-I} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \rightarrow \quad x = -y-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \rightarrow \quad z = 2 \end{array}$$

Lösung für a = 1:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re$$