Klausur: Mathematik am Freitag, 20. Januar 2017

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung (1 Variable)

Gegeben ist eine Kostenfunktion

$$K(x) = 0{,}1x^3 - 2{,}4x^2 + 30x + 640$$

a) Zeigen Sie, dass die **Produktionsmenge im Minimum der Grenzkosten** identisch mit der **Menge im Wendepunkt der Kostenfunktion** ist.
Wie kann dies (ökonomisch) begründet werden?

Lösung:

$$Grenzkosten: \quad K'(x) = 0{,}3x^2 - 4{,}8x + 30$$

$$Minimum\ Grenzkosten:$$

$$K''(x) = 0{,}6x - 4{,}8 = 0 \rightarrow x = 8$$

$$K'''(x) = 0{,}6 > 0 \rightarrow Minimum$$

$$Wendepunktstelle:$$

$$K''(x) = 0{,}6x - 4{,}8 = 0 \rightarrow x = 8$$

$$K'''(x) = 0{,}6 \neq 0 \rightarrow Wendestelle$$

Erläuterung:
Im Minimum der Grenzkosten haben wir die Stelle der geringsten Veränderung der Kosten. Im Wendepunkt hat man die Stelle der geringsten Steigungsveränderung. Da die Grenzkosten die Steigung der Kostenfunktion darstellt, ist diese Stelle mit der Wendestelle identisch.

b) Wo liegt das Betriebsminimum?
Ermitteln Sie hierzu auch die kurzfristige Preisuntergrenze.

Lösung:

variable Kosten: $K_v(x) \quad = \quad 0{,}1x^3 - 2{,}4x^2 + 30x$

variable Stückkosten: $\dfrac{K_v(x)}{x} \quad = \quad 0{,}1x^2 - 2{,}4x + 30$

Minimum der variablen Kosten pro Stück:

$$\left(\frac{K_v(x)}{x}\right)^{I} \quad = \quad 0{,}2x - 2{,}4 \quad = \quad 0 \quad \to \quad x \quad = \quad 12$$

$$\left(\frac{K_v(x)}{x}\right)^{II} \quad = \quad 0{,}2 \quad > \quad 0 \quad \to \quad Minimum$$

Kurzfristige Preisuntergrenze:

$$\frac{K_v(12)}{12} \quad = \quad 0{,}1 \cdot 144 - 2{,}4 \cdot 12 + 30 \quad = \quad 15{,}6[GE] \quad \to \quad BM\,(12 \mid 15{,}6)$$

c) Zeigen Sie, dass das Betriebsoptimum bei x = 20 angenommen wird.
Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

Lösung:

$Durchschnittskosten:$

$$\frac{K(x)}{x} \quad = \quad \frac{0{,}1x^3 - 2{,}4x^2 + 30x + 640}{x} \quad = \quad 0{,}1x^2 - 2{,}4x + 30 + \frac{640}{x}$$

$Minimum\ der\ Durchschnittskosten:$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)^{I} \quad = \quad 0{,}2x - 2{,}4 - \frac{640}{x^2} \quad = \quad 0 \quad \xrightarrow{\cdot x^2} \quad 0{,}2x^3 - 2{,}4x^2 - 640 \quad = \quad 0$$

$$\to \quad x \quad = \quad 20$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)^{II} \quad = \quad 0{,}2 + \frac{1280}{x^3} \quad > \quad 0 \quad \to \quad Minimum$$

Langfristige Preisuntergrenze:

$$\frac{K(20)}{20} \quad = \quad 0{,}1x^2 - 2{,}4x + 30 + \frac{640}{x} \quad = \quad 54[GE] \quad \to \quad BO(20 \mid 54)$$

2.) Extrema ohne Nebenbedingungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad x^3 + y^2 - 6xy - 16y$$

a) Bestimmen Sie die **<u>beiden</u>** stationären Stellen und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.

b) Berechnen Sie für die Extrema auch die zugehörigen Funktionswerte.

Lösung:

$$I) \quad f_x(x,y) \quad = \quad 3x^2 - 6y \quad = \quad 0$$

$$II) \quad f_y(x,y) \quad = \quad 2y - 6x - 16 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad y \quad = \quad 3x + 8$$

$$\xrightarrow{y=3x+8 \quad \text{einsetzen in I}} \quad 3x^2 - 6(3x+8) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 18x - 48 = 0$$

$$\rightarrow \quad x_1 = 8 \quad und \quad x_2 = -2 \quad \rightarrow \quad y_1 = 32 \quad und \quad y_2 = 2$$

$$\xrightarrow{\text{2 stationäre Stellen}} \quad S_1(8 \mid 32 \mid f_1) \quad und \quad S_2(-2 \mid 2 \mid f_2)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) \quad = \quad \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad H_{S_1}(f) \quad = \quad \begin{pmatrix} 48 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} f_{xx} = 48 > 0 \\ \det(H) = 96 - 36 = 60 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \quad positiv\ definit: Min(8 \mid 32 \mid -512)$$

$$\rightarrow \quad H_{S_2}(f) \quad = \quad \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} f_{xx} = -12 < 0 \\ \det(H) = -24 - 36 = -60 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \quad indefinit: SP(-2 \mid 2 \mid -12)$$

3.) Ableitungen und Rechentechnik

a) Lösen Sie den Summenausdruck in seine Einzelsummanden auf.
Eine Summenbestimmung muss nicht erfolgen.

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=2}^{5}(2k)^n$$

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=2}^{5}(2k)^n \quad = \quad \sum_{n=2}^{5} 2^n + 4^n + 6^n \quad =$$

$$2^2+4^2+6^2+2^3+4^3+6^3+2^4+4^4+6^4+2^5+4^5+6^5 \quad = \quad 10.744$$

b) Bilden Sie die jeweils 1. partielle Ableitung der beiden Funktionen:

(i) $f(x,y) \quad = \quad 6x^3y^2+2x^4-3y^5$

(ii) $g(x,y,z) \quad = \quad e^{x^3+y^2}+x\cdot e^{2y}-3e^{4x-z}+5z^2$

Lösung:

$$f_x(x,y) \quad = \quad 18x^2y^2+8x^3 \quad und \quad f_y(x,y) \quad = \quad 12x^3y-15y^4$$

$$g_x(x,y,z) \quad = \quad 3x^2e^{x^3+y^2}+e^{2y}-12e^{4x-z}$$

$$g_y(x,y,z) \quad = \quad 2ye^{x^3+y^2}+2x\cdot e^{2y} \quad und \quad g_z(x,y,z) \quad = \quad 3e^{4x-z}+10z$$

4.) Extrema unter Nebenbedingungen

a) Berechnen Sie das Optimum der Funktion $f(x,y) = 14x^{0,3}y^{0,7}$
unter folgender Nebenbedingung: $16,8x + 19,6y \leq 14.000$

b) Bestimmen Sie auch den zugehörigen Funktionswert der Funktion $f(x,y)$

c) Ermitteln Sie den Wert des Lagrangeparameters im Optimum und erläutern Sie dessen ökonomische Aussagekraft im Rahmen der Aufgabenstellung. Zeigen Sie Ihre Erläuterung auch rechnerisch an einem Beispiel.

Lösung:

$$L(x,y,k) = 14x^{0,3}y^{0,7} + k(14.000 - 16,8x - 19,6y)$$

$$L_x(x,y,k) = 4,2\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} - 16,8k = 0 \rightarrow k = \frac{4,2}{16,8}\cdot\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$L_y(x,y,k) = 9,8\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} - 19,6k = 0 \rightarrow k = \frac{9,8}{19,6}\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis berechnen}:$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} = \frac{1}{2}\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} \rightarrow y = 2x$$

$$\textit{Einsetzen in NB}: \quad 16,8x + 19,6\cdot 2x = 14.000 \rightarrow 56x = 14.000$$

$$\rightarrow x = 250 \rightarrow y = 500$$

$$\rightarrow f(250/500) = 14\cdot 250^{0,3}\cdot 500^{0,7} = 5.685,77$$

$$\textit{Wert für } k: \quad k = \frac{1}{4}\cdot\frac{(2x)^{0,7}}{x^{0,7}} = \frac{1}{4}\cdot 2^{0,7} = 2^{-1,3} \approx 0,406$$

$$\textit{Nachweis}: \quad 14.000 \xrightarrow{+10} 14.010 \quad \textit{mit Austauschverhältnis } y = 2x$$

$$\rightarrow 56x = 14.010 \rightarrow x = 250,18 \rightarrow y = 500,36$$

$$\rightarrow f(250,18/500,36) = 14\cdot 250,18^{0,3}\cdot 500,36^{0,7} = 5.689,86$$

$$\rightarrow \Delta f = 5.689,86 - 5.685,77 = 4,09 \rightarrow 10k$$

5.) Übergangsmatrizen

Auf einem Markt konkurrieren drei Produkte A, B und C. Auf Grund diverser Erhebungen von Marktforschungsinstituten lässt sich ein Wechselverhalten der Konsumenten von einem zum nächsten Monat entsprechend folgender Matrix erstellen: $U = \begin{pmatrix} 0,7 & 2b & 5c \\ 0,1 & 0,75 & 3c \\ a & 3b & 0,6 \end{pmatrix}$

Im Oktober teilen sich die Marktanteile der Produkte wie folgt auf: 20 % - 40 % - 40 %

a) Wie werden sich die Marktanteile in den kommenden beiden Monaten entwickeln?

b) Welche Marktanteile lagen im September vor?

c) Bei welcher Verteilung entsteht ein Markt im Zustand des Gleichgewichts, so dass trotz Übergängen die Anteile konstant bleiben?

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,25 \\ 0,1 & 0,75 & 0,15 \\ 0,3 & 0,15 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_{Okt} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{Nov} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,25 \\ 0,1 & 0,75 & 0,15 \\ 0,3 & 0,15 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,38 \\ 0,34 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{Dez} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,25 \\ 0,1 & 0,75 & 0,15 \\ 0,3 & 0,15 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,38 \\ 0,34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,319 \\ 0,364 \\ 0,317 \end{pmatrix}$$

$$\mathit{Ansatz}:$$

$$U \cdot \vec{p}_{Sep} = \vec{p}_{Okt} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,25 \\ 0,1 & 0,75 & 0,15 \\ 0,3 & 0,15 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{LGS} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02858 \\ 0.41904 \\ 0.55238 \end{pmatrix}$$

$$\mathit{Statisches\ Gleichgewicht - Ansatz}:$$

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,3 & 0,1 & 0,25 \\ 0,1 & -0,25 & 0,15 \\ 0,3 & 0,15 & -0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix} -0,3 & 0,1 & 0,25 \\ 0,1 & -0,25 & 0,15 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 31 \\ 28 \\ 26 \end{pmatrix}$$

6.) Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus

a) Ermitteln Sie graphisch das Maximum unter Berücksichtigung der drei Restriktionen/Nebenbedingungen:

NB 1: $x+2y \leq 30$ NB 2: $\frac{9}{8}x+\frac{3}{2}y \leq 27$ NB 3: $x \leq 18$

Zielfunktion : $z(x,y) = 2x+3y \rightarrow \max.$

Anmerkung: ***Verwenden Sie zur Lösungsfindung bitte das Koordinatensystem in der Anlage.***

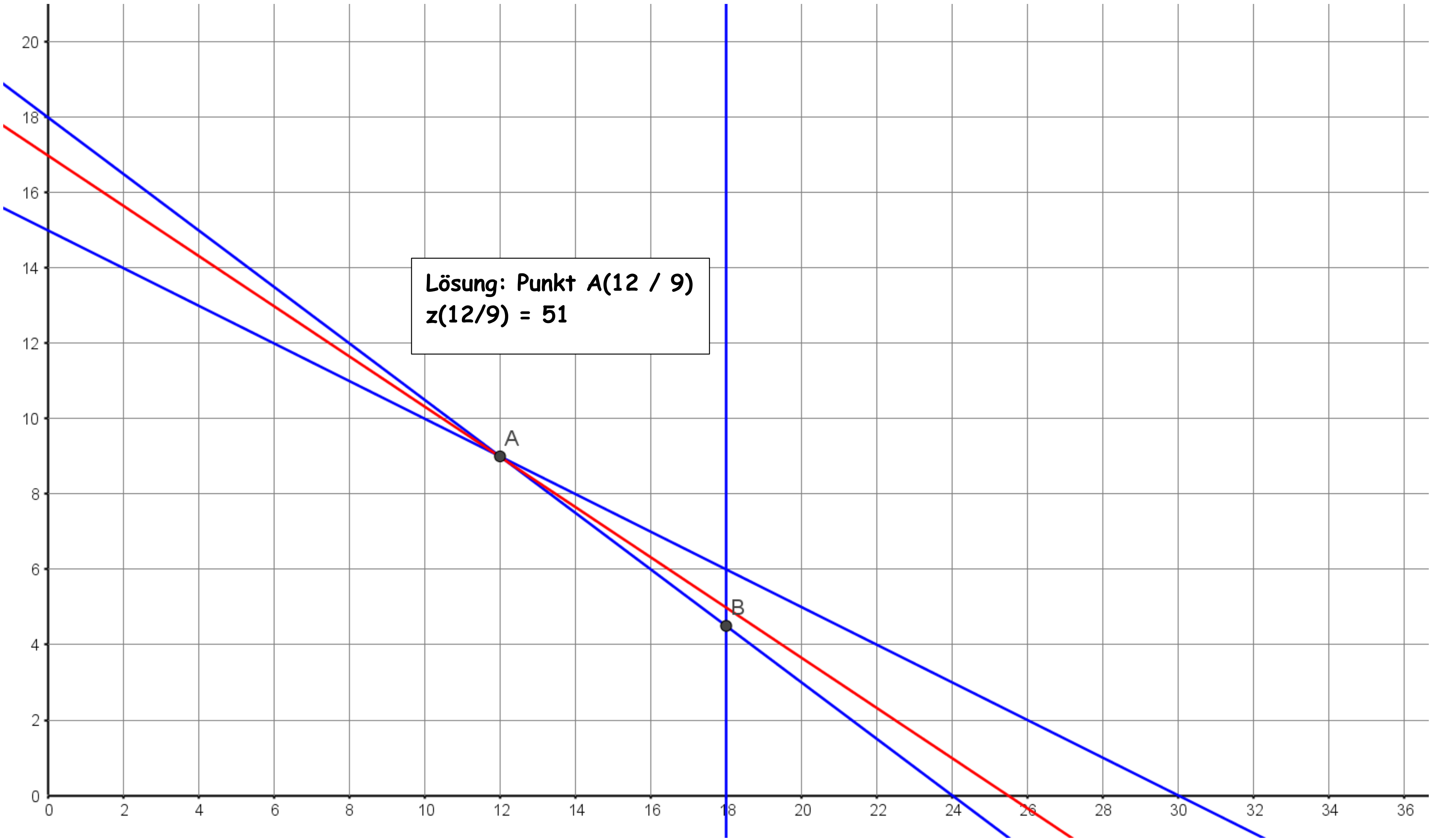
b) Bestimmen Sie rechnerisch per Simplexalgorithmus die optimale Lösung des Maximumproblems:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
$I)$	2	1	1	0	0	12
$II)$	1	1	0	1	0	7
$III)$	1	3	0	0	1	15
Z	2	3	0	0	0	$G \rightarrow \max.$

Nebenbedingungen:

(1) $2x+y \leq 12$ (2) $x+y \leq 7$ (3) $x+3y \leq 15$

Zielfunktion : $z(x,y) = 2x+3y \rightarrow \max.$


Lösung: Punkt A(12 / 9)
z(12/9) = 51
A
B
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36

Anlage zu 6a)

Simplexalgorithmus:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
$I)$	2	1	1	0	0	12	
$II)$	1	1	0	1	0	7	
$III)$	1	3	0	0	1	15	$\xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot III}$
Z	2	3	0	0	0	$G \to \max.$	

$I)$	2	1	1	0	0	12	$\xrightarrow{I-III}$
$II)$	1	1	0	1	0	7	$\xrightarrow{II-III}$
$III)$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	5	
Z	2	3	0	0	0	G	$\xrightarrow{Z-3\cdot III}$

$I)$	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	7	
$II)$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	2	$\xrightarrow{\frac{3}{2}\cdot III}$
$III)$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	5	
Z	1	0	0	0	-1	$G-15$	

$I)$	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	7	$\xrightarrow{I-\frac{5}{3}\cdot II}$
$II)$	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	
$III)$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	5	$\xrightarrow{III-\frac{1}{3}\cdot II}$
Z	1	0	0	0	-1	$G-15$	$\xrightarrow{Z-II}$

$I)$	0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$II)$	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
$III)$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
Z	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$G-18$

Lösung: $(x \quad y \quad u_1) = (3 \quad 4 \quad 2)$ $\mathit{mit}\ G_{\max} = 18$