Klausur: Wirtschaftsmathematik
(Lehrveranstaltung)

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: Öffentliche Wirtschaft

Datum: **25.01.2019**

Matrikelnummer: ....

Dozent: Jürgen Meisel

Kurs: WOW18 A **Semester:** 1

Hilfsmittel: Formelsammlung; Wiss. TR

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Bewertung: Maximale Punktzahl: 100

Erreichte Punktzahl:

Punkte: ....

Signum: ....

Anmerkungen: **Aus den Aufgaben 3 – 5 bitte zwei zur Bearbeitung auswählen. Es kommen definitiv nur zwei der drei in die Wertung!!!**

Aufgabennr.:		maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Teil 1	14		Lineare Optimierung (graphische Lösung)
1	Teil 2	18		Lineare Optimierung (Simplexalgorithmus)
2	a	14		Extrema ohne NB
2	b	14		Extrema ohne NB
3		20		Übergangsmatrizen und statisches Gleichgewicht
4		20		Extrema unter NB (Lagrangeansatz)
5		20		Matrizen & Differentialrechnung
Summe		100		

Aufgabe 1: Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus

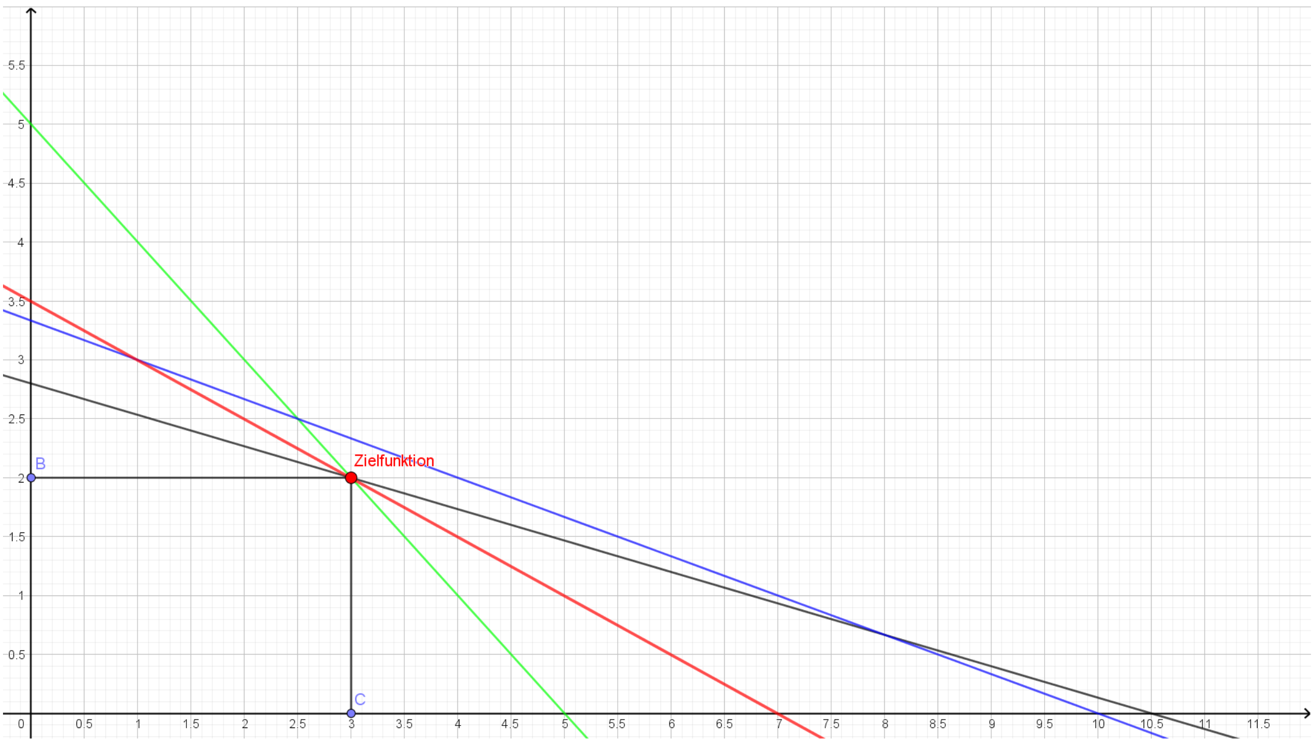
Teil 1:

Die Gärtnerei Immergrün kann von einem Nachbargrundstück bis zu 5 ha Land erwerben. Das Land soll teilweise als Freiland, aber auch mit Folie überdacht bewirtschaftet werden.
Für dessen Bewirtschaftung stehen insgesamt nicht mehr als 420 Arbeitstage pro Jahr zur Verfügung; 1 ha Freiland erfordert 40 Arbeitstage im Jahr, 1 ha überdachtes Land dagegen 150 Arbeitstage jährlich.
An Kosten entstehen für 1 ha Freiland pro Jahr 800 €, für 1 ha überdachtes (unbeheiztes) Land fallen pro Jahr 2.400 € an - ohne Berücksichtigung der Baukosten für die Überdachung.
Die Gärtnerei möchte die Kosten auf insgesamt 8000 € im Jahr beschränken.
Der voraussichtliche jährliche Reingewinn pro ha Freiland beträgt 1.000 €, für das überdachte Land 2.000 €.
Wie viel Hektar sollte die Gärtnerei kaufen, und wie viel Hektar davon wird sie mit Folie überdecken, wenn der jährliche Gewinn unter den genannten Bedingungen möglichst groß sein soll?

Lösen Sie das Problem graphisch.

Lösung:

	frei (x)	überdacht (y)	Zur Verfügung stehen
Fläche	1	1	5
Anbaukosten [T€ / ha]	800	2.400	8.000 €
Arbeitstage [Tage / ha]	40	150	420 Arbeitstage
Gewinn [T€ / ha]	1.000	2.000	



⇨ Lösungspunkt liegt bei (3[frei]/2[überdacht]) mit einem Gewinn von 7.000,00 €

Teil 2:

Der Porzellanbetrieb Wichtel & Quarz stellt Tassen, Vasen und Kunstfiguren her.
Die einzelnen Produktionszusammenhänge bzw. Bedingungen sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	Tasse(n)	Vase(n)	Figur(en)	Zur Verfügung stehen
Porzellanmasse	250 Gramm	1 Kilogramm	500 Gramm	150 Kilogramm
Deckungsbeitrag [€ / Stück]	2	4	3	

Zudem muss berücksichtigt werden, dass in der kommenden Produktionsperiode
maximal 100 Vasen,
maximal 120 Figuren,
maximal 300 Tassen und Figuren hergestellt werden können.

Mit welchen Produktionsmengen kann der maximale Deckungsbeitrag in der Planungsperiode realisiert werden?
Wie hoch ist dann der Deckungsbeitrag?

Bestimmen Sie die gewinnmaximale Anbaukombination mittels **Simplexalgorithmus**.
- ⇨ **Bitte Anlage verwenden!**

Lösung: vgl. Anlage

Aufgabe 2: Extrema ohne Nebenbedingung

a) Zeigen Sie, dass die Funktion genau eine stationäre Stelle besitzt und untersuchen Sie deren Eigenschaft.
Im Falle von **Extrema bitte den Funktionswert** bestimmen.

$$f(x,y) = 10x^2 + 40xy + 5y^2 - 20x - 80y + 100$$

Lösung:

$$f(x,y) = 10x^2 + 40xy + 5y^2 - 20x - 80y + 100$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 20x + 40y - 20 = 0 \\ f_y(x,y) &= 40x + 10y - 80 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = \frac{15}{7} \wedge y = -\frac{4}{7}$$

$$Hesse - Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 40 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{Det(H)} \det(H) = 200 - 1600 = -1.400 < 0$$

$$\Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

b) Für welchen Wertebereich des Parameters k besitzt die Funktion immer ein Maximum?

$$f_k\left(x,y\right) \;=\; 2kx^2-8x+4ky^2-32y+100$$

Begründen bzw. erläutern Sie Ihre Behauptung.

Lösung:

$$\begin{aligned} f_k\left(x,y\right) &= 2kx^2-8x+4ky^2-32y+100 \\ \left.\begin{aligned} f_x\left(x,y\right) &= 4kx-8 &&= 0 \\ f_y\left(x,y\right) &= 8ky-32 &&= 0 \end{aligned}\right\} &\rightarrow x=\frac{2}{k} \wedge y=\frac{4}{k} \end{aligned}$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H\left(f\right) \;=\; \begin{pmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 8k \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} f_{xx}=4k<0 \\ \det\left(H\right)=32k^2>0 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} k<0 \\ k\neq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad Max \quad \Leftrightarrow \quad k<0$$

Aufgabe 3: Übergangsmatrizen und statisches Gleichgewicht

Zum 01.01.2002 wurde in der EU die Euro-Münze in Umlauf gebracht. Für die dann entstandene „Münzwanderung pro Jahr" zwischen den Gebieten (D)eutschland, (F)rankreich und (S)onstige Länder wurden folgende Übergänge erwartet:

$$\begin{array}{cc} ☞ & \begin{matrix} D & F & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ F \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,08 & c \\ 0,05 & b & 0,05 \\ a & 0,02 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Da man die Situation von Deutschland aus betrachtet, sind zu Beginn natürlich 100 % der Münzen in Deutschland.

a) Vervollständigen Sie die Übergangsmatrix, indem Sie die Werte für a, b und c ermitteln.

Lösung: a = 0,05 b = 0,9 c = 0,15

b) Bestimmen Sie die prozentuale Verteilung der in Deutschland in Umlauf gebrachten Münzen auf die drei beobachteten Gebiete (D, F und S) zum 01.01.2003 und 01.01.2004.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0,90 & 0,08 & 0,15 \\ 0,05 & 0,90 & 0,05 \\ 0,05 & 0,02 & 0,80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,90 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0,90 & 0,08 & 0,15 \\ 0,05 & 0,90 & 0,05 \\ 0,05 & 0,02 & 0,80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,90 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8215 \\ 0,0925 \\ 0,0860 \end{pmatrix}$$

c) Besteht die Gefahr, dass der Münzbestand der Anfangsausgabe im Laufe der Zeit in Deutschland unter 50 % sinken wird?

Lösung:

$$Ansatz: \quad U \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \rightarrow \quad (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad [statisches\ Gleichgewicht]$$

$$\begin{pmatrix} -0,1 & 0,08 & 0,15 \\ 0,05 & -0,1 & 0,05 \\ 0,05 & 0,02 & -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Zeile\ 3]{Ersatz}$$

$$\begin{pmatrix} -0,1 & 0,08 & 0,15 \\ 0,05 & -0,1 & 0,05 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Lösung} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 38 \\ 25 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Auswertung Wert für Komponente x: $\quad x = \dfrac{38}{75} > 0,5$

$\Rightarrow$ Der Münzbestand von zu Beginn in Deutschland ausgegebener Münzen wird in Deutschland nicht unter 50 % sinken.

Aufgabe 4: **Extrema mit Nebenbedingung**

Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = \dfrac{1}{2} x^{0,3} y^{0,7}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 6 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 24 €.
Das Budget beträgt insgesamt 720,00 €.

a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsergebnis q_{max} mittels der Lagrangemethode.

b) Bestimmen Sie den Wert des Lagrange-Parameters im Produktionsmaximum und erläutern Sie die ökonomische Aussagekraft bezogen auf den Kontext bzw. die Ausgangssituation.

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \;=\; \frac{1}{2}x^{0,3}y^{0,7} + \lambda(720-6x-24y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \;=\; 0{,}15\cdot\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} - 6\lambda \;\overset{!}{=}\; 0 \;\Rightarrow\; \lambda \;=\; \frac{0{,}15}{6}\cdot\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \;=\; 0{,}35\cdot\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} - 24\lambda \;\overset{!}{=}\; 0 \;\Rightarrow\; \lambda \;=\; \frac{0{,}35}{24}\cdot\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

Austauschverhältnis:

$$\frac{0{,}15}{6}\cdot\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} \;=\; \frac{0{,}35}{24}\cdot\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} \;\Rightarrow\; y \;=\; \frac{7}{12}x$$

eingesetzt in NB:

$$720 \;=\; 6x+24y \;\xrightarrow{y \;=\; \frac{7}{12}x}\; 720 \;=\; 6x+24\cdot\frac{7}{12}x$$

$$\Rightarrow\; 720 \;=\; 20x \;\Rightarrow\; x=36 \;\Rightarrow\; y=21$$

$$\Rightarrow\; q(36 \mid 21) \;=\; \frac{1}{2}\cdot 36^{0,3}\cdot 21^{0,7} \;\approx\; 12{,}34$$

Lagrangemultiplikator:

$$\lambda \;\overset{\lambda_x}{=}\; \frac{0{,}15}{6}\cdot\left(\frac{21}{36}\right)^{0,7} \;\overset{\lambda_y}{=}\; \frac{0{,}35}{24}\cdot\left(\frac{36}{21}\right)^{0,3} \;\approx\; 0{,}017$$

Erhöhung des Budgets um 1 GE würde zu einer Erhöhung des Outputs um 0,017 ME führen.

Aufgabe 5: **Matrizen, Vektoren und Differentialrechnung**

Die Preis-Absatz-Funktion des Monopolisten Mono-Max gestaltet sich in folgender Form:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}\right]^T\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; Det\begin{pmatrix} x & 3! \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass sich daraus folgende PAF darstellen lässt:

$$p(x) \;=\; -5x+12$$

b) Bestimmen Sie Höchstpreis und Sättigungsmenge des Marktes.

Die Kostenfunktion ist gegeben durch:

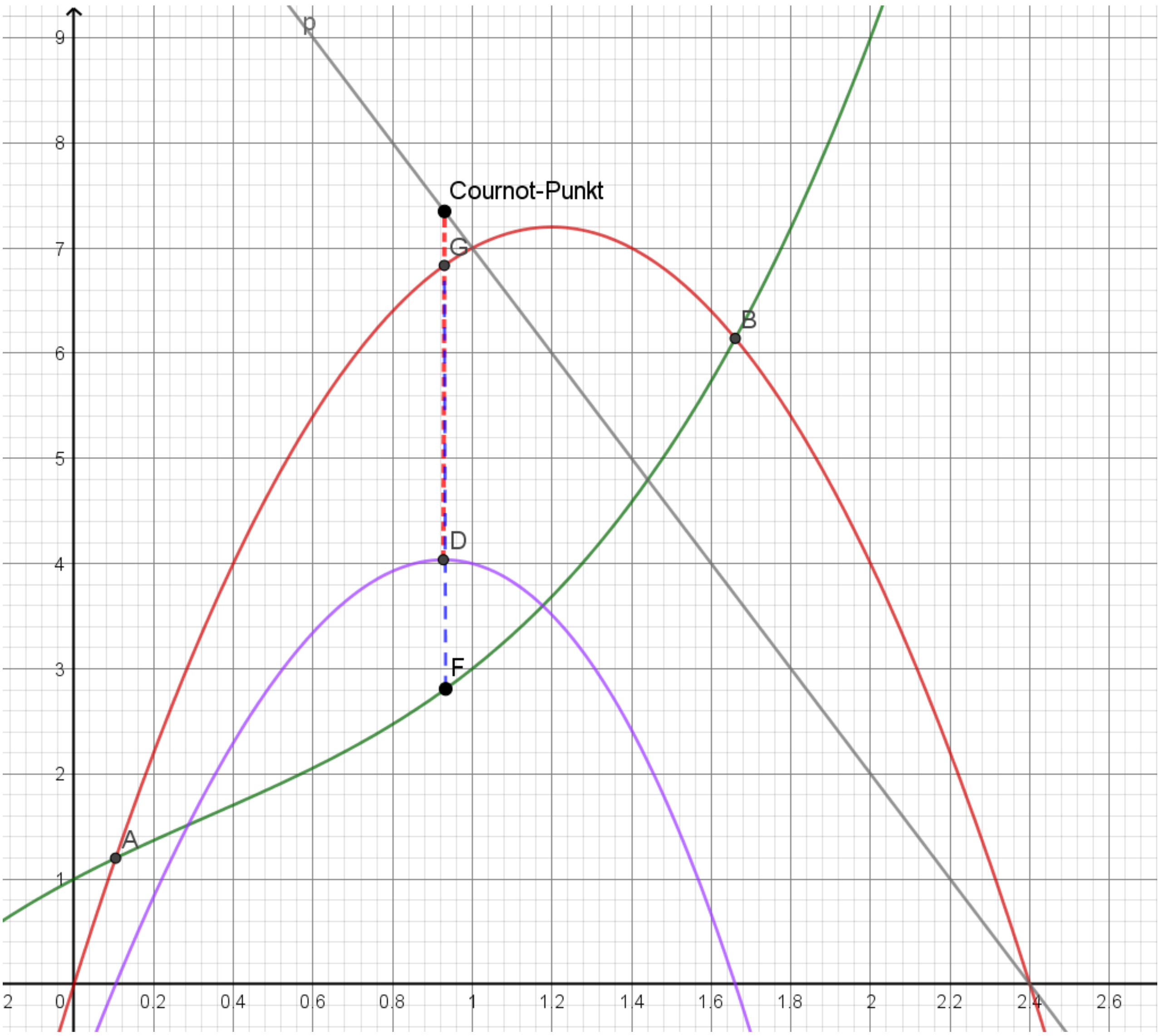
$$K(x) = 7+\sum_{t=0}^{3}\left[(3-t)!\cdot x^{t}\cdot(-1)^{t+1}\right]$$

c) Ermitteln Sie die Gewinnschwelle und Gewinngrenze.

d) Bestimmen Sie das Gewinnmaximum und zeigen Sie dabei, dass es sich um ein Maximum handelt.

e) Berechnen Sie den Cournot-Punkt.

Lösung:



$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}\right]^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} x & 3! \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3p \\ x+5p \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2x+12$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3p & x+5p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2x+12$$

$$\rightarrow 4x+6p-x-5p = -2x+12 \rightarrow p(x) = -5x+12$$

Höchstpreis: $p(0) = 12$

Sättigungsmenge: $p(x) = 0 \rightarrow -5x+12 = 0 \rightarrow x = \frac{12}{5} = 2,4$

Umsatzfunktion: $u(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (-5x+12) = -5x^2+12x$

Kostenfunktion:

$$K(x) = 7+\sum_{t=0}^{3}\left[(3-t)! \cdot x^t \cdot (-1)^{t+1}\right] = 7-6+2x-x^2+x^3$$

Gewinnfunktion:

$$g(x) = u(x)-K(x) = -5x^2+12x-\left(1+2x-x^2+x^3\right)$$
$$g(x) = -5x^2+12x-1-2x+x^2-x^3$$
$$g(x) = -x^3-4x^2+10x-1$$

$$g(x) = -x^3-4x^2+10x-1 = 0 \rightarrow x_{GS} = 0,1 \quad und \quad x_{GG} = 1,66$$

$$g'(x) = -3x^2-8x+10 = 0 \rightarrow x_1 = -3,6\,[n.def.] \quad und \quad x_2 = 0,93$$
$$g''(x) = -6x-8 \rightarrow g''(0,93) < 0 \rightarrow Max(0,93 \mid 4,04)$$

$Cournot-Punkt:$

$$p(0,93) = -5 \cdot 0,93+12 = 7,35 \rightarrow C(0,93 \mid 7,35)$$

Anlage zu Aufgabe 1 (Teil 2):

	x (Tassen)	y (Vasen)	z (Figuren)	u_1	u_2	u_3	u_4	b	Umformung
I	0,25	1	0,5	1	0	0	0	150	I - II
II	0	1	0	0	1	0	0	100	
III	0	0	1	0	0	1	0	120	
IV	1	0	1	0	0	0	1	300	
Z	2	4	3	0	0	0	0	DB	Z – 4*II
I	0,25	0	0,5	1	- 1	0	0	50	2*I
II	0	1	0	0	1	0	0	100	
III	0	0	1	0	0	1	0	120	
IV	1	0	1	0	0	0	1	300	
Z	2	0	3	0	- 4	0	0	DB - 400	
I	0,5	0	1	2	- 2	0	0	100	
II	0	1	0	0	1	0	0	100	
III	0	0	1	0	0	1	0	120	III - I
IV	1	0	1	0	0	0	1	300	IV - I
Z	2	0	3	0	- 4	0	0	DB - 400	Z – 3*I
I	0,5	0	1	2	- 2	0	0	100	
II	0	1	0	0	1	0	0	100	
III	- 0,5	0	0	- 2	2	1	0	20	½ * III
IV	0,5	0	0	- 2	2	0	1	200	
Z	0,5	0	0	- 6	2	0	0	DB - 700	

Fortsetzung Anlage

	x (Tassen)	y (Vasen)	z (Figuren)	u_1	u_2	u_3	u_4	b	Umformung
I	0,5	0	1	2	- 2	0	0	100	I + 2*III
II	0	1	0	0	1	0	0	100	II - III
III	- 0,25	0	0	- 1	1	0,5	0	10	
IV	0,5	0	0	- 2	2	0	1	200	IV – 2*III
Z	0,5	0	0	- 6	2	0	0	DB - 700	Z – 2*III
I	0	0	1	0	0	1	0	120	
II	0,25	1	0	1	0	- 0,5	0	90	II – 0,25*IV
III	- 0,25	0	0	- 1	1	0,5	0	10	III + 0,25*IV
IV	1	0	0	0	0	- 1	1	180	
Z	1	0	0	- 4	0	- 1	0	DB - 720	Z – IV
I	0	0	1	0	0	1	0	120	
II	0	1	0	1	0	- 0,25	- 0,25	45	
III	0	0	0	- 1	1	0,25	0,25	55	
IV	1	0	0	0	0	- 1	1	180	
Z	0	0	0	- 4	0	0	- 1	DB - 900	