Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: Öffentliche Wirtschaft   Datum: 29.01.2020

Matrikelnummer:			**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW19A	**Semester:**	1		
Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung			**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 100		Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....		Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.*** ***<u>Bitte beachten:</u>*** ***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.*** ***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!***			

Aufgabennr.:		**maximale Punkte**	**erreichte Punkte**	**Bemerkungen**
1		**20**		
2		**20**		
3		**20**		
4		**20**		
5		**20**		
6		**20**		
Summe		**100**		

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

Der Markt von Tablet-PCs wird im Wesentlichen von drei Herstellern A, M und S beherrscht. Nach einem Jahr bleiben 65% der Kunden von A dem Hersteller treu,15% der Kunden wechseln zum Hersteller M und der Rest wechselt zum Hersteller S.
Dem Hersteller M bleiben 50% treu, 30% wechseln zum Hersteller A und die übrigen wechseln zum Hersteller S.
Dagegen bleiben 40% dem Hersteller S treu, einige wechseln zu M und 40% wechseln zum Hersteller A.

Im Jahr 2018 konnte man folgendes Verteilungsverhältnis feststellen:

A : M : S entspricht 2 : 5 : 3

a) Erstellen Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor.

Verwenden Sie nun für die kommenden Aufgaben folgende Angaben:

$$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_{2018}} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

b) Welche Anteile sind 2019 zu erwarten?

c) Ermitteln Sie mit diesen Daten die Herstelleranteile im Jahr 2017.
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sinne der Anbieter-/Herstellersituation 2017.

d) Der Hersteller A kann nur am Markt rentabel existieren, wenn langfristig ein Anteil von ca. 60 % erreicht werden kann.
Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

Lösung:

a) $$U = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,30 & 0,40 \\ 0,15 & 0,50 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,40 \end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_{2018}} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

b) $$\overrightarrow{p_{2019}} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,19 \\ 0,28 \end{pmatrix}$$

c) $$Ansatz: \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{p_{2017}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz: } \quad U \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \rightarrow \quad (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad [\textit{statisches Gleichgewicht}]$$

$$\begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & -0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Zeile 3}]{\text{Ersatz}}$$

d)

$$\begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Lösung}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auswertung Wert für Komponente x: $\quad x = \frac{1}{3} < 0,6$

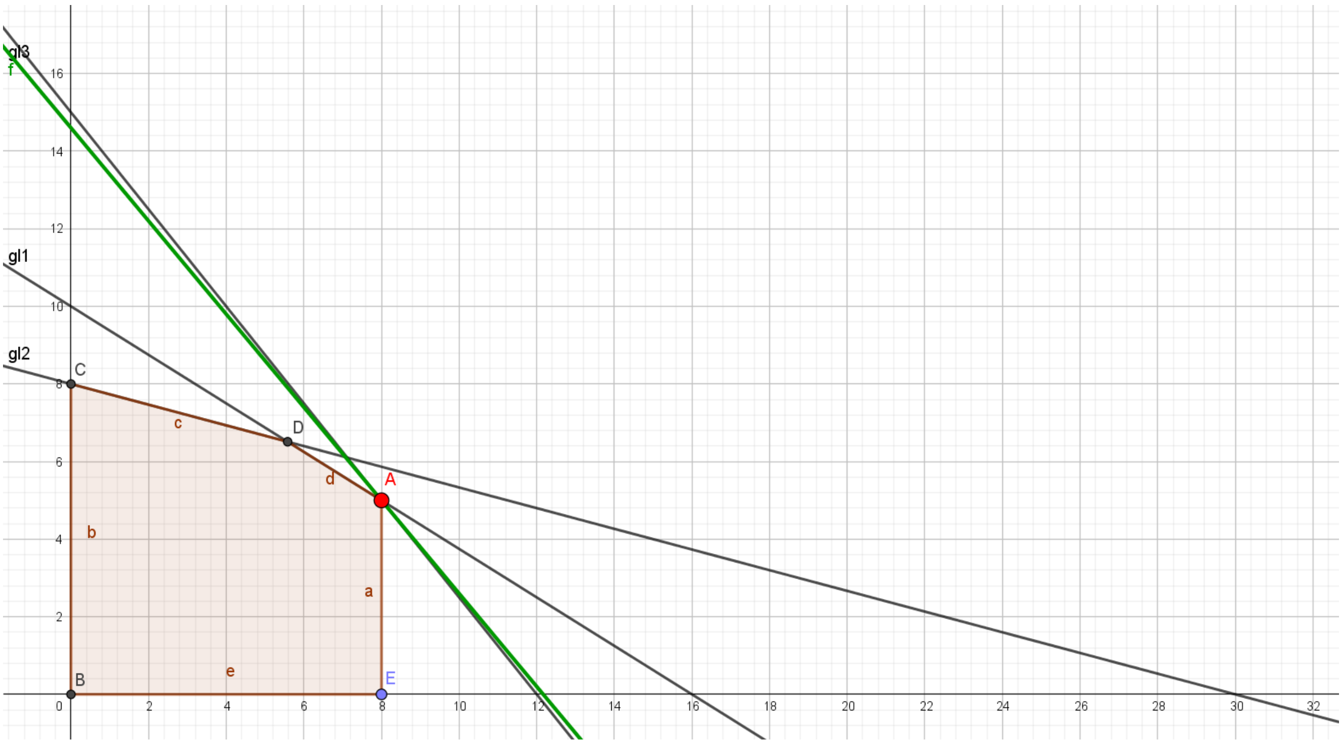
$\Rightarrow$ Der voraussichtliche Marktanteil bleibt deutlich unter 60 %; daher kann der Anbieter wohl nicht ohne entsprechende Anpassungen langfristig am Markt rentabel arbeiten.

(2) Simplexalgorithmus: Lineare Optimierung

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x + 8y & \leq & 80 \\ (2) & 4x + 15y & \leq & 120 \\ (3) & 10x + 8y & \leq & 120 \\ \hline ZF & f(x,y) & = & 12x + 10y \rightarrow \max. \end{array}$$

Erstellen Sie die **graphische *und* die analytische** Lösung.

Lösung:



Simplexalgorithmus:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	5	8	1	0	0	80	
II	4	15	0	1	0	120	
III	10	8	0	0	1	120	0,1*III
Z	12	10	0	0	0	G	
I	5	8	1	0	0	80	I – 5*III
II	4	15	0	1	0	120	III– 4*III
III	1	0,8	0	0	0,1	12	
Z	12	10	0	0	0	G	Z– 12*III
I	0	4	1	0	- 0,5	20	0,25 * I
II	0	11,8	0	1	- 0,4	72	
III	1	0,8	0	0	0,1	12	
Z	0	0,4	0	0	- 1,2	G - 144	
I	0	1	0,25	0	- 0,125	5	
II	0	11,8	0	1	- 0,4	72	II – 11,8*I
III	1	0,8	0	0	0,1	12	III-0,8*I
Z	0	0,4	0	0	- 1,2	G - 144	Z-0,4*I
I	0	1	0,25	0	- 0,125	5	
II	0	0	- 2,95	1	1,075	13	
III	1	0	- 0,2	0	0,2	8	
Z	0	0	- 0,1	0	- 1,15	G - 146	

$$\Rightarrow \quad L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \quad mit \quad G_{max} = 146$$

(3) Differentialrechnung: Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die beiden stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{12}{x} - 9x + x^3 - (y-4)^2$$

und untersuchen Sie **diese Stellen** auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei der Extremwertstelle*** 😉

Lösung:

$$f(x,y) = \frac{12}{x} - 9x + x^3 - (y-4)^2$$

$$f_x(x,y) = -\frac{12}{x^2} - 9 + 3x^2 = 0 \xrightarrow{\cdot x^2} 3x^4 - 9x^2 - 12 = 0$$

$$\xrightarrow[u=x^2]{Subst.} u_1 = 4 = x^2 \xrightarrow{Wurzel} |x| = 2 \quad \wedge \quad u_2 = -1 \rightarrow keine\ Lösung$$

$$f_y(x,y) = -2(y-4) = 0 \rightarrow y = 4$$

$$Stationäre\ Stellen: \quad S_1(-2 \mid 4 \mid 4) \quad und \quad S_2(2 \mid 4 \mid -4)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} \frac{24}{x^3} + 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Det(H)} f_{xx} = -15 < 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 30 > 0$$

$$\Rightarrow Max(-2 \mid 4 \mid 4)$$

$$H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Det(H)} \det(H) = -30 < 0$$

$$\Rightarrow Sattelpunkt$$

(4) Differentialrechnung: Extrema mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) = 2x^{0,6} \cdot y^{0,4}$

Die Mengeneinheit für **x kostet 8,00 €**, der Preis für eine Mengeneinheit von **y liegt bei 6,00 €.** Insgesamt stehen uns **16.240,00 €** zur Verfügung. Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 2x^{0,6}y^{0,4} + \lambda(16.240 - 8x - 6y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 1,2 \cdot \frac{y^{0,4}}{x^{0,4}} - 8\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1,2}{8} \cdot \frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0,8 \cdot \frac{x^{0,6}}{y^{0,6}} - 6\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{0,8}{6} \cdot \frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}$$

Austauschverhältnis:

$$\frac{1,2}{8} \cdot \frac{y^{0,4}}{x^{0,4}} = \frac{0,8}{6} \cdot \frac{x^{0,6}}{y^{0,6}} \Rightarrow y = \frac{8}{9}x$$

eingesetzt in NB:

$$16.240 = 8x + 6y \xrightarrow{y = \frac{8}{9}x} 16.240 = 8x + 6 \cdot \frac{8}{9}x$$

$$\Rightarrow 16.240 = \frac{40}{3}x \Rightarrow x = 1.218 \Rightarrow y = 1.082,66$$

$$\Rightarrow f(1.218 \mid 1.082,66) = 2 \cdot 1.218^{0,6} \cdot 1.082,66^{0,4} \approx 2.323,89$$

Lagrangemultiplikator:

$$\lambda \overset{\lambda_x}{=} \frac{1,2}{8} \cdot \left(\frac{1.082,66}{1.218}\right)^{0,4} \overset{\lambda_y}{=} \frac{0,8}{6} \cdot \left(\frac{1.218}{1.082,66}\right)^{0,6} \approx 0,1431$$

Erhöhung des Budgets um 1 GE würde zu einer Erhöhung des Outputs um 0,1431 ME führen.

(5) Differentialrechnung: Ableitungstechnik

Bilden Sie jeweils die erste partielle Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $$f(x,y) = \left(x^2 - 3y\right)^4 + y^3 + x^5 - 3$$

b) $$f(x,y,z) = y^2 \cdot e^{x^4} + e^{2x-4y+5z} - x \cdot y \cdot z$$

Lösung:

$$f_x(x,y) = 4\left(x^2-3y\right)^3 \cdot 2x + 5x^4 = 8x \cdot \left(x^2-3y\right)^3 + 5x^4$$

$$f_y(x,y) = 4\left(x^2-3y\right)^3 \cdot (-3) + 3y^2 = (-12) \cdot \left(x^2-3y\right)^3 + 3y^2$$

$$f_x(x,y,z) = y^2 \cdot e^{x^4} \cdot 4x^3 + 2 \cdot e^{2x-4y+5z} - y \cdot z$$

$$f_y(x,y,z) = 2y \cdot e^{x^4} - 4 \cdot e^{2x-4y+5z} - x \cdot z$$

$$f_z(x,y,z) = 5 \cdot e^{2x-4y+5z} - x \cdot y$$

(6) Matrizen, Vektoren, Summenzeichen und Differentialrechnung

Teil 1: Die Preis-Absatz-Funktion des Monopolisten Mono-Max gestaltet sich in folgender Form:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}\right]^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} x & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie daraus resultierende **Preis-Absatz-Funktion p(x)**

Lösung:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}\right]^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} x & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3p \\ x+5p \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2x+12$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3p & x+5p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2x+12$$

$$\rightarrow 4x+6p-x-5p = -2x+12 \rightarrow p(x) = -5x+12$$

Teil 2: Die Kostenfunktion ist gegeben durch:

$$K(x) \quad = \quad 7 + \sum_{t=0}^{3}\left[(4-t)\cdot x^t \cdot (-1)^{t+1}\right]$$

Stellen Sie die Kostenfunktion **ohne Summenzeichen** in expliziter Form dar.

Lösung:

Kostenfunktion:

$$K(x) \quad = \quad 7 + \sum_{t=0}^{3}\left[(4-t)\cdot x^t \cdot (-1)^{t+1}\right] \quad = \quad 7 - 4 + 3x - 2x^2 + x^3$$

$$K(x) \quad = \quad 3 + 3x - 2x^2 + x^3$$

Teil 3:

a) Ermitteln Sie die Gewinnschwelle und Gewinngrenze.

b) Bestimmen Sie das Gewinnmaximum und zeigen Sie dabei, dass es sich um ein Maximum handelt.

Lösung:

Umsatzfunktion: $u(x) \quad = \quad x \cdot p(x) \quad = \quad x \cdot (-5x + 12) \quad = \quad -5x^2 + 12x$

Gewinnfunktion:

$$g(x) \quad = \quad u(x) - K(x) \quad = \quad -5x^2 + 12x - \left(3 + 3x - 2x^2 + x^3\right)$$

$$g(x) \quad = \quad -5x^2 + 12x - 3 - 3x + 2x^2 - x^3$$

$$g(x) \quad = \quad -x^3 - 3x^2 + 9x - 3$$

$$g(x) \quad = \quad -x^3 - 3x^2 + 9x - 3 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x_{GS} = 0,39 \quad und \quad x_{GG} = 1,55$$

$$g'(x) \quad = \quad -3x^2 - 6x + 9 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -3\,[n.def.] \quad und \quad x_2 = 1$$

$$g''(x) \quad = \quad -6x - 6 \quad \rightarrow \quad g''(1) \quad < \quad 0 \quad \rightarrow \quad Max(1 \mid 2)$$