Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: Öffentliche Wirtschaft Datum: Januar 2021

Matrikelnummer:			**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW20A/B	**Semester:**	1		
Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung			**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 60		Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....		Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.*** ***<u>Bitte beachten:</u>*** ***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.*** ***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!***			

Nr	Thema der Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Übergangsmatrizen und stat. Gleichgewicht	12		
2	Ökonomische Anwendung zur Diff.-Rg. (1 Variable)	12		
3	Diff.-Rg I (mehrere Var.): Extrema ohne NB	12		
4	Diff.-Rg II (mehrere Var.): Extrema mit NB	12		
5	Rechentechnik zu Matrizen	12		
6	Lineare Optimierung & Simplexalgorithmus	12		
Summe		60		

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

In Übstadt an der Unwiss gibt es drei Discounter - (K)lugUndBillig, (L)etzterPreis und (M)arktFürAlle – die den Markt unter sich aufgeteilt haben.
Insgesamt verkehren im Quartal 25.000 Kunden bei den drei Anbietern.
Allerdings gibt es natürlich Veränderungen der Kundenfrequenz auf die Anbieter von einem zum nächsten Quartal, die lückenhaft in der nachfolgenden Übergangsmatrix dargestellt sind:

$$U[K,L,M]=\begin{pmatrix}0,4 & b & c\\ 3a & 2b & c\\ 2a & 5b & 0,2\end{pmatrix}$$

Im 2. Quartal 2020 konnte man folgendes Verteilungsverhältnis feststellen: A : B : C entspricht 5 : 10 : 15

a) Vervollständigen Sie die Übergangsmatrix U[K, L, M] und erstellen Sie den Verteilungsvektor für das 2. Quartal 2020.

Lösung:

$$0,4+3a+2a=1 \quad\rightarrow\quad a=0,12$$
$$b+2b+5b=1 \quad\rightarrow\quad b=0,125$$
$$c+c+0,2=1 \quad\rightarrow\quad c=0,4$$

$$Verteilungsvektor: \vec{p}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Verwenden Sie nun für die kommenden Aufgaben folgende Angaben:

$$U[K,L,M]=\begin{pmatrix}0,2 & 0,2 & 0,2\\ 0,4 & 0,8 & 0\\ 0,4 & 0 & 0,8\end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_{2.Qartal}}=\begin{pmatrix}0,8\\0,2\\0\end{pmatrix}$$

b) Geben Sie eine Erläuterung den Wert 0 im Verteilungsvektor.

Anbieter nicht am Markt aktiv; der Anbieter hatte keine Kunden

c) Welche Anteile sind im 4. Quartal 2020 zu erwarten?

$$U[K,L,M]=\begin{pmatrix}0,2 & 0,2 & 0,2\\ 0,4 & 0,8 & 0\\ 0,4 & 0 & 0,8\end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_{2.Qartal}}=\begin{pmatrix}0,8\\0,2\\0\end{pmatrix}$$

$$U^2\cdot\overrightarrow{p_{2.Qartal}}=\overrightarrow{p_{4.Qartal}}$$

$$oder$$

$$U\cdot\overrightarrow{p_{2.Qartal}}=\overrightarrow{p_{3.Qartal}} \quad und \quad U\cdot\overrightarrow{p_{3.Qartal}}=\overrightarrow{p_{4.Qartal}} \quad\rightarrow\quad \overrightarrow{p_{4.Qartal}}=\begin{pmatrix}0,200\\0,464\\0,336\end{pmatrix}$$

d) Prüfen Sie, ob mit den Angaben die Anteile im 1. Quartal 2020 ermittelt werden können.
Wenn Ja – dann geben Sie diese an; wenn Nein – begründen Sie den Widerspruch.

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{p_{1.Qartal}} = \overrightarrow{p_{2.Qartal}} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

keine Lösung aus LGS

Nachweis der Nicht-Lösbarkeit mittels Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c|c} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,8 & 5i \\ 0,4 & 0,8 & 0 & 0,2 & 2,5ii \\ 0,4 & 0 & 0,8 & 0 & 2,5iii \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 4 & \\ 1 & 2 & 0 & 0,5 & ii-i \\ 1 & 0 & 2 & 0 & iii-i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 4 & i-ii \\ 0 & 1 & -1 & -3,5 & \\ 0 & -1 & 1 & -4 & iii+ii \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 2 & 7,5 & i-ii \\ 0 & 1 & -1 & -3,5 & \\ 0 & 0 & 0 & -7,5 & iii+ii \end{array}$$

=> Widerspruch in Zeile 3

e) Der Anbieter (M)arktFürAlle kann langfristig nur am Markt rentabel existieren, wenn im Quartal mind. 7.500 Kunden einkaufen.
Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

$$(U-E)\cdot\vec{x}=\vec{0} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & 0 \\ 0,4 & 0 & -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & 0 \\ 0,4 & 0 & -0,2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad 25.000 \cdot 0,4 = 10.000 > 7.500$$

(2) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen

Die Firma Harry Hasenfuß – Monopol – agiert mit der Prais-Absatz-Funktion $p(x) = -3x + 70$.

Die Kostenfunktion beläuft sich nach eingehenden Analysen auf $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 12x + 80$

Die hergestellte Menge x wird auch komplett zum jeweiligen Preis p(x) abgesetzt.

a) Bestimmen Sie die Umsatz-Funktion u(x) und das Umsatz-/Erlösmaximum.
Welchen Preis kann Harry Hasenfuß hier zugrunde legen?

$$p(x) = -3x + 70 \xrightarrow{x=\frac{35}{3}} p\left(\frac{35}{3}\right) = -3 \cdot \frac{35}{3} + 70 = 35$$

$$u(x) = -3x^2 + 70x \xrightarrow{1.Ableitung} u'(x) = -6x + 70 = 0 \rightarrow x = \frac{35}{3} \approx 11{,}67$$

$$u''(x) = -6 < 0 \rightarrow Max\ bei\ x = \frac{35}{3} \approx 11{,}67 \xrightarrow{y-Wert} u\left(\frac{35}{3}\right) = 408\frac{1}{3}$$

b) Ermitteln Sie nun die Gewinnfunktion und berechnen Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze des Unternehmens.

$$g(x) = u(x) - K(x) \rightarrow g(x) = -3x^2 + 70x - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 12x + 80\right) = -\frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x^2 + 58x - 80$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x^2 + 58x - 80 = 0$$

$$x = -14{,}57\,[n.def.] \quad x = 11{,}66\,[Gewinngrenze] \quad x = 1{,}413\,[Gewinnschwelle]$$

c) Wo liegt das Gewinnmaximum? Wie hoch ist es?

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x^2 + 58x - 80$$

$$g'(x) = -x^2 - x + 58 = 0 \rightarrow x = 7{,}13 \quad x = -8{,}13\,[n.def.]$$

$$g''(x) = -2x - 1 \rightarrow g''(7{,}13) = -2 \cdot 7{,}13 - 1 < 0 \rightarrow g_{\max}\ bei\ x = 7{,}13$$

$$g(7{,}13) = -\frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x^2 + 58x - 80 = 187{,}3$$

d) Berechnen Sie nun noch den Cournot-Punkt.

$$p(7{,}13) = -3 \cdot 7{,}13 + 70 = 48{,}61 \rightarrow C(7{,}13 \mid 48{,}61)$$

(3) **Differentialrechnung Ia:** **Extrema ohne Nebenbedingung(en)**

Ermitteln Sie die **beiden** stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2}x^4 - 16x + \frac{1}{9}y^3 - \frac{1}{2}y^2$$

und untersuchen Sie **diese** auf ihre Extremwerteigenschaft.
Berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei der Extremwertstelle*** 😉

$$f_x(x,y) \quad = \quad 2x^3 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

$$f_y(x,y) \quad = \quad \frac{1}{3}y^2 - y = 0 \quad \rightarrow \quad y\left(\frac{1}{3}y - 1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 3$$

$$S_1(2 \mid 3 \mid f_1) \quad und \quad S_2(2 \mid 0 \mid f_2)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}y - 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1(2 \mid 3 \mid f_1)}(f) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{r} f_{xx} = 24 > 0 \\ \det(H) = 24 - 0 = 24 > 0 \end{array}\right\} pos.\,definit \quad \rightarrow \quad Min(2 \mid 3 \mid -25{,}5)$$

$$H_{S_2(2 \mid 0 \mid f_2)}(f) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{r} f_{xx} = 24 > 0 \\ \det(H) = -24 - 0 = -24 < 0 \end{array}\right\} indefinit \quad \rightarrow \quad SP$$

Differentialrechnung Ib: **Extrema ohne Nebenbedingung(en)**

Ermitteln Sie die stationäre(n) Stelle(n) der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad 3x^2 + 4x - 8xy + 2y^2 - \frac{1}{2}y$$

und untersuchen Sie diese auf ihre Extremwerteigenschaft.
Berechnen Sie den Funktionswert nur ***im Falle einer Extremwertstelle***.

$$\left.\begin{array}{lcl} f_x(x,y) & = & 6x + 4 - 8y = 0 \\ f_y(x,y) & = & -8x + 4y - \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0{,}3 \\ y = 0{,}725 \end{array} \quad \rightarrow \quad S(0{,}3 \mid 0{,}725 \mid f)$$

$$H(f) \quad = \quad \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{r} f_{xx} = 6 > 0 \\ \det(H) = 24 - 64 = -40 < 0 \end{array}\right\} \text{indefint} \quad \rightarrow \quad SP(0{,}3 \mid 0{,}725 \mid f)$$

(4) **Differentialrechnung II:** **Extrema mit Nebenbedingung(en)**

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f\left(x,y\right)=4x^{0,55}\cdot y^{0,45}$

Eine Mengeneinheit für x kostet 8,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 4,00 €. Insgesamt steht ein Budget von b GE zur Verfügung.

a) Wie hoch muss das Budget b sein, damit man unter den gegebenen Bedingungen im Maximum die Produktionszahlen x = 1.400 erhält?

b) Ermitteln Sie dann auch den Wert für y (im Maximum).

$$L\left(x,y,\lambda\right)=4x^{0,55}\cdot y^{0,45}+\lambda\left(b-8x-4y\right)$$

$$L_x\left(x,y,\lambda\right) = 2,2x^{-0,45}\cdot y^{0,45}-8\lambda = 2,2\cdot\frac{y^{0,45}}{x^{0,45}}-8\lambda = 0 \rightarrow \lambda=\frac{2,2}{8}\cdot\frac{y^{0,45}}{x^{0,45}}$$

$$L_y\left(x,y,\lambda\right) = 1,8x^{0,55}\cdot y^{-0,55}-4\lambda = 1,8\cdot\frac{x^{0,55}}{y^{0,55}}-4\lambda = 0 \rightarrow \lambda=\frac{1,8}{4}\cdot\frac{x^{0,55}}{y^{0,55}}$$

$$\xrightarrow[\lambda=\lambda]{Austauschverhältnis} \frac{2,2}{8}\cdot\frac{y^{0,45}}{x^{0,45}}=\frac{1,8}{4}\cdot\frac{x^{0,55}}{y^{0,55}} \rightarrow y=\frac{1,8\cdot 8}{4\cdot 2,2}\cdot x=\frac{18}{11}\cdot x\approx 1,6364\cdot x$$

$$\xrightarrow{y=\frac{18}{11}\cdot x} y=\frac{18}{11}\cdot 1.400=2.290,91 \quad oder \quad y=1,6364\cdot 1.400=2.290,96$$

$$\xrightarrow{Budget} b=8x+4y \rightarrow b=8\cdot 1.400+4\cdot 2.290,91=20.363,64$$

$$\Pr oduktionsergebnis: \quad f\left(1.400/2.290,91\right)=4\cdot 1.400^{0,55}\cdot 2.290,91^{0,45}\approx 6.989,31$$

c) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um 500 GE erhöht?

$$\lambda = \frac{2,2}{8}\cdot\frac{2.290,91^{0,45}}{1.400^{0,45}} = \frac{2,2}{8}\cdot\left(\frac{18}{11}\right)^{0,45} = 0,34322$$

$$\xrightarrow{\Delta b=500} \Delta f=500\lambda \rightarrow \Delta f=500\cdot 0,34322=171,61 \rightarrow f_{neu}=7.160,92$$

$\Pr obe:$

$$b_{alt}=20.363,64 \xrightarrow{+500} b_{neu}=20.863,64$$

$$b_{neu}=8x+4\cdot\frac{18}{11}\cdot x \rightarrow b_{neu}=\frac{160}{11}x \rightarrow 20.863,64=\frac{160}{11}x \rightarrow x=1.434,38$$

$$\xrightarrow{y=\frac{18}{11}\cdot x} y=\frac{18}{11}\cdot 1.434,38=2.347,16$$

$$\Pr oduktionsergebnis_{neu}: \quad f\left(1.434,38/2.347,16\right)=4\cdot 1.434,38^{0,55}\cdot 2.347,16^{0,45}\approx 7.160,93$$

(5) Rechentechnik zu Matrizen

a) Bilden Sie jeweils die erste partielle Ableitung zu folgender Funktion:

$$f(x,y) = Det\left\{\left[\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^4 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & xy \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{x^3} \end{pmatrix}\right\}$$

Lösung:

$$f(x,y) = Det\left\{\left[\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^4 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & xy \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{x^3} \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^2 & 0 \\ 0 & x^2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2y^2 & 0 \\ 0 & x^2y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^2-1 & 0 \\ -1 & x^2y^2-xy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2y^2-1 & 0 \\ -1 & x^2y^2-xy \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3y^2-x & 0 \\ -x & \left(x^2y^2-xy\right)\cdot\frac{y^2}{x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3y^2-x & 0 \\ -x & \frac{y^4}{x}-\frac{y^3}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} x^3y^2-x & 0 \\ -x & \frac{y^4}{x}-\frac{y^3}{x^2} \end{pmatrix} = \left(x^3y^2-x\right)\cdot\left(\frac{y^4}{x}-\frac{y^3}{x^2}\right) = x^2y^6 - xy^5 - y^4 + \frac{y^3}{x}$$

$$f_x = 2xy^6 - y^5 - \frac{y^3}{x^2} \qquad f_y = 6x^2y^5 - 5xy^4 - 4y^3 + \frac{3y^2}{x}$$

b) Bestimmen Sie das Ergebnis des Ausdrucks $Det\left(2U-4T\right)+Det\left(V\cdot W^{T}\right)$ mit

$$U=\begin{pmatrix}2x & -2 & 0\\ 0 & x^{2} & 1\\ 1 & 2x & 0\end{pmatrix}\quad V=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & -x\end{pmatrix}\quad W=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 0 & x\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}x & -4 & -3\\ 0 & 5 & -2x\\ -2 & x & 3\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Det\left(2U-4T\right)+Det\left(V\cdot W^{T}\right)=$$

$$\left(2U-4T\right)=\begin{pmatrix}4x & -4 & 0\\ 0 & 2x^{2} & 2\\ 2 & 4x & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4x & -16 & -12\\ 0 & 20 & -8x\\ -8 & 4x & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 12 & 12\\ 0 & 2x^{2}-20 & 8x+2\\ 10 & 0 & -12\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}0 & 12 & 12\\ 0 & 2x^{2}-20 & 8x+2\\ 10 & 0 & -12\end{pmatrix}=0+120\left(8x+2\right)+0-120\left(2x^{2}-20\right)-0-0$$

$$\det\begin{pmatrix}0 & 12 & 12\\ 0 & 2x^{2}-20 & 8x+2\\ 10 & 0 & -12\end{pmatrix}=960x+240-240x^{2}+2.400=-240x^{2}+960x+2.640$$

$$V\cdot W^{T}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & -x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6 & -2x\\ 2 & 0 & 0\\ -x & -3x & -x^{2}\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}2 & -6 & -2x\\ 2 & 0 & 0\\ -x & -3x & -x^{2}\end{pmatrix}=0+0+12x^{2}-0-0-12x^{2}=0$$

$$Ergebnis:\quad -240x^{2}+960x+2.640+0=-240x^{2}+960x+2.640$$

(6) Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus

Teil A:

Produkt	Typ A	Typ B	maximal möglich
Stück pro Tag	x_1	x_2	100 Stück
Arbeitszeit pro Stück	4	1	160 Stunden
Kosten pro Stück	20	10	1100 EURO
Gewinn pro Stück	120	40	? EURO

Wie müssen x_1 und x_2 gewählt werden, damit der Gewinn maximal wird?

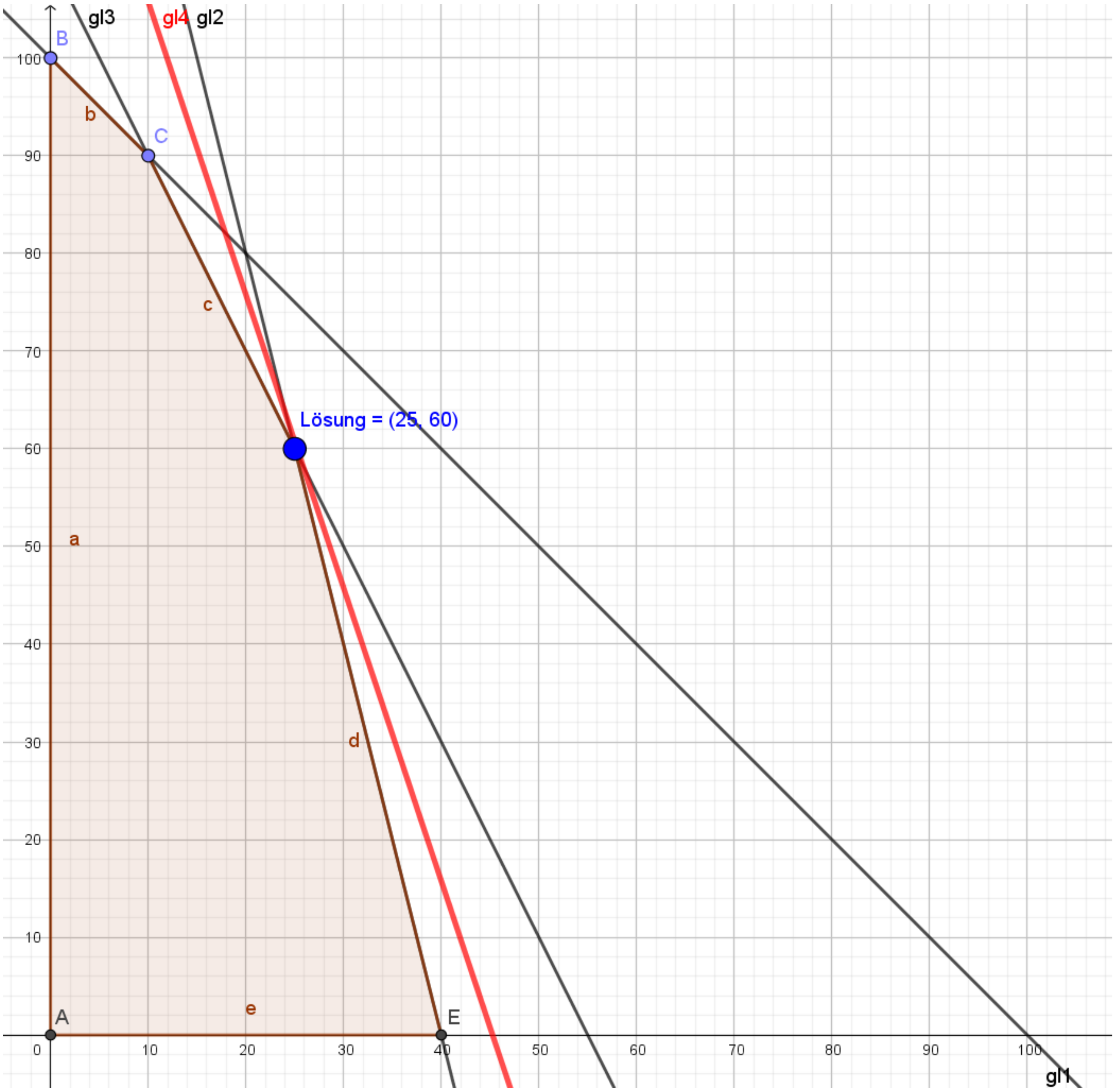
$x = \text{Anzahl Typ } A \qquad y = \text{Anzahl Typ } B$

$x + y \leq 100$

$4x + y \leq 160$

$20x + 10y \leq 1.100$

$z(x, y) = 120x + 40y \rightarrow \max.$



Simplexalgorithmus:

$x = Anzahl\ Typ\ A \qquad y = Anzahl\ Typ\ B$

$x + y \le 100$

$4x + y \le 160$

$20x + 10y \le 1.100$

$z(x,y) = 120x + 40y \to \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	1	1	1	0	0	100	$100/1=100$
ii	4	1	0	1	0	160	$160/4=40 \to ii/4$
iii	20	10	0	0	1	1100	$1100/20=55$
z	120	40	0	0	0	g	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	1	1	1	0	0	100	$i-ii$
ii	1	0,25	0	0,25	0	40	
iii	20	10	0	0	1	1100	$iii-20ii$
z	120	40	0	0	0	g	$z-120ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	0	0,75	1	−0,25	0	60	$60/0,75=80$
ii	1	0,25	0	0,25	0	40	$40/0,25=160$
iii	0	5	0	−5	1	300	$300/5=60 \to iii/5$
z	0	10	0	−30	0	$g-4.800$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	0	0,75	1	−0,25	0	60	$i-0,75iii$
ii	1	0,25	0	0,25	0	40	$ii-0,25iii$
iii	0	1	0	−1	0,2	60	
z	0	10	0	−30	0	$g-4.800$	$z-10iii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	0	0	1	0,5	−0,15	15
ii	1	0	0	0,5	−0,05	25
iii	0	1	0	−1	0,2	60
z	0	0	0	−20	−2	$g-5.400$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 60 \\ 15 \end{pmatrix} \quad mit \quad z_{\max}(25 \mid 60) = 5.400$$

Teil B:

Ein Unternehmen hat über die Nutzung freier Produktionskapazitäten zu entscheiden. Es können zusätzlich zur laufenden Produktion die Produkte P_1 und P_2 hergestellt werden. Die folgende Tabelle beschreibt die Bearbeitungszeiten der Produkte in den einzelnen Arbeitsschritten und deren freie Kapazitäten sowie den Deckungsbeitrag der Produkte. Wie hoch sollte die Zusatzproduktion der Produkte gewählt werden, damit der Gewinn des Unternehmens maximiert wird?

Prozess	Bearbeitungszeit je Einheit P_1	P_2	Freie Kapazität (in Minuten)
Drehen	0	8	640
Fräsen	6	6	720
Hobeln	6	3	600
Deckungsbeitrag je Einheit	1 GE	2 GE	

Erstellen Sie die **graphische *<u>und</u>* die analytische** Lösung.

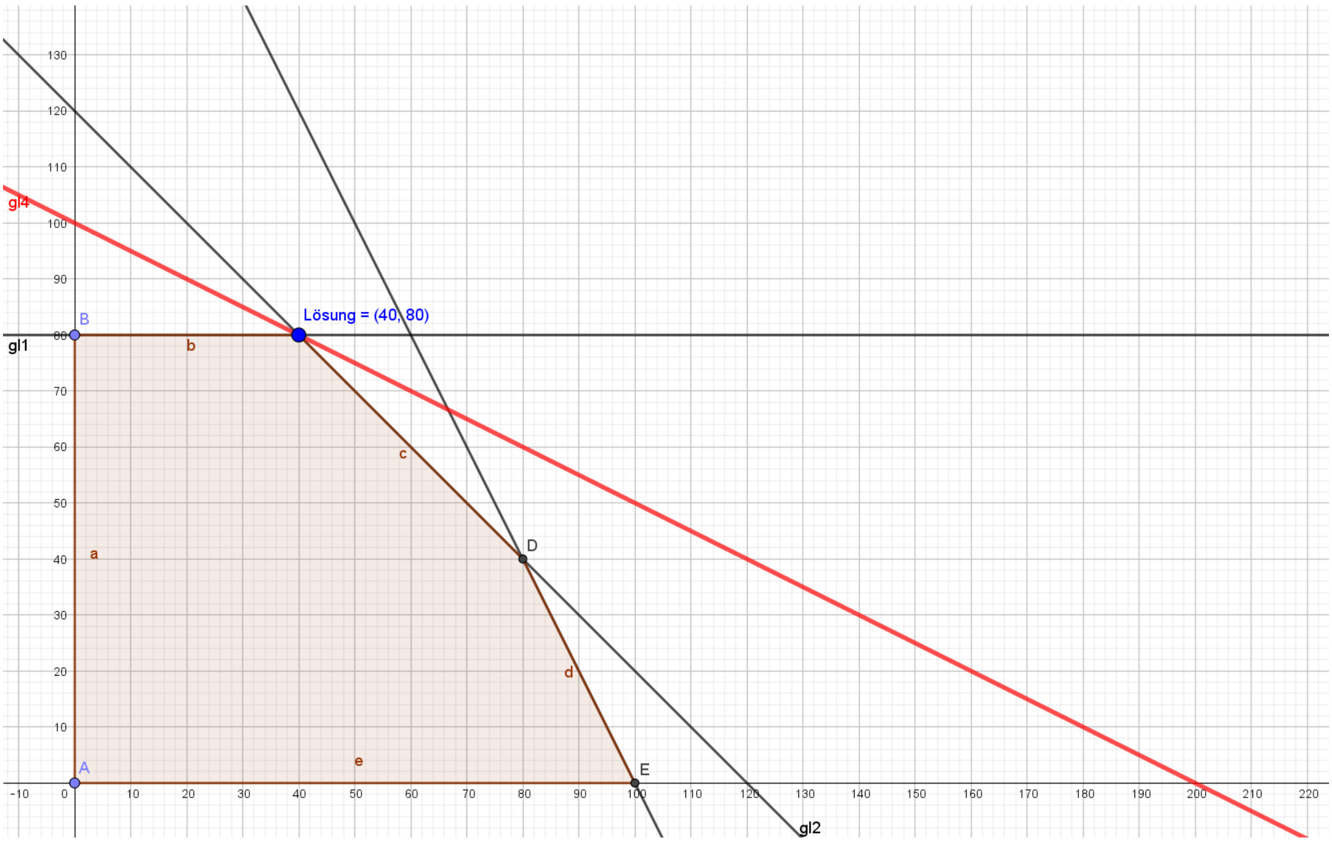
x = Anzahl Produkt P_1 y = Anzahl Produkt P_2

$$8y \leq 640$$

$$6x + 6y \leq 720$$

$$6x + 3y \leq 600$$

$$z(x,y) = x + 2y \to \max.$$



x = Anzahl Produkt P_1 y = Anzahl Produkt P_2

$8y \le 640$

$6x + 6y \le 720$

$6x + 3y \le 600$

$z(x,y) = x + 2y \to \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	0	8	1	0	0	640	$640/8 = 80 \to i/80$
ii	6	6	0	1	0	720	$720/6 = 120$
iii	6	3	0	0	1	600	$600/3 = 200$
z	1	2	0	0	0	db	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	0	1	0,125	0	0	80	
ii	6	6	0	1	0	720	$ii - 6i$
iii	6	3	0	0	1	600	$iii - 3i$
z	1	2	0	0	0	db	$z - 2i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	0	1	0,125	0	0	80	$80/0 \to \infty$
ii	6	0	$-0,75$	1	0	240	$240/6 = 40 \to ii/6$
iii	6	0	$-0,375$	0	1	360	$360/6 = 60$
z	1	0	$-0,25$	0	0	$db - 160$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	0	1	0,125	0	0	80	
ii	1	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	40	
iii	6	0	$-0,375$	0	1	360	$iii - 6ii$
z	1	0	$-0,25$	0	0	$db - 160$	$z - ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	0	1	0,125	0	0	80	
ii	1	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	40	
iii	0	0	0,125	-1	1	120	
z	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$db - 200$	

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix} \quad mit \quad z_{\max}(40 \mid 80) = 200$$