Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: BWL-Öffentliche Wirtschaft-Wirtschaftsförderung Datum: xx.xx.2022

Matrikelnummer:				**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW21 A/B		**Semester:**	1		
Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung				**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 60			Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....			Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.*** ***<u>Bitte beachten:</u>*** ***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.*** ***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!***				

Nr	Thema der Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Matrizenrechnung: Rechentechnik	12		
2	Diff.-Rg I (mehrere Var.): Extrema ohne NB	12		
3	Diff.-Rg II (mehrere Var.): Extrema mit NB	12		
4	Ökonomische Anwendung zur Diff.-Rg. (1 Variable)	12		
5	Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung	12		
6	Matrizenrechnung: Leontief-Modell	12		
Summe		60		

(1) **Rechentechnik zu Matrizen**

Gegeben sind die Matrizen A und B: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Ergebnisse der Ausdrücke $A^2+2AB+B^2$ *und* $(A+B)^2$ und erläutern Sie kurz, warum hier die 1. Binomische Formel nicht gilt.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 8 & 5\end{pmatrix} \quad und \quad B^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 11\end{pmatrix} \quad und \quad A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 16 & 34\end{pmatrix}$$

$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 8 & 5\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -14\\ 12 & 36\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2 & -8\\ 16 & 34\end{pmatrix}=(A+B)^2$$

(2) **Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingung(en)**

Ermitteln Sie die **beiden** stationären Stellen der Funktion

$$f(a,b,c) = a^3-2a+\frac{1}{2}b^2-4b+\frac{1}{4}c^2-6c+bc$$

und untersuchen Sie **diese** auf ihre Extremwerteigenschaft.

Berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei der Extremwertstelle*** 😉

$$f(a,b,c) = a^3-2a+\frac{1}{2}b^2-4b+\frac{1}{4}c^2-6c+bc$$

$$f_a(a,b,c) = 3a^2-2=0 \rightarrow a^2=\frac{2}{3} \rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\approx\pm 0,82$$

$$f_b(a,b,c) = b-4+c=0 \rightarrow b=4-(-4) \rightarrow b=8$$

$$f_c(a,b,c) = \frac{1}{2}c-6+b=0$$

$$f_c(a,b,c) = \frac{1}{2}c-6+4-c=0 \rightarrow -\frac{1}{2}c=2 \rightarrow c=-4$$

$$H(f)=\begin{pmatrix}6a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0,5\end{pmatrix}$$

$$H(f)=\begin{pmatrix}6\cdot(-0,82) & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4,92 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0,5\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{l} D_1=-4,92<0 \\ D_2=-4,92\cdot 1-0\cdot 0=-4,92<0 \end{array} \quad \begin{array}{c} indefinit \\ kein \\ Extremum \end{array}$$

$$H(f)=\begin{pmatrix}6\cdot 0,82 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4,92 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0,5\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{l} D_1=4,92>0 \\ D_2=4,92\cdot 1-0\cdot 0=4,92>0 \\ D_3=4,92\cdot 1\cdot 0,5-1\cdot 1\cdot 4,92<0 \end{array} \quad \begin{array}{c} indefinit \\ kein \\ Extremum \end{array}$$

(3) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f\left(x,y\right)=15\cdot x^{0,45}\cdot y^{0,55}$

Eine Mengeneinheit für **x kostet 56,00 GE**, der Preis für eine Mengeneinheit

von **y liegt bei 64,00 GE**.

Insgesamt steht ein Budget von **b = 8.800** GE zur Verfügung.

a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um **50** GE erhöht?

$$L\left(x,y,\lambda\right)=15\cdot x^{0,45}\cdot y^{0,55}+\lambda\left(8.800-56x-64y\right)$$

$$L_x\left(x,y,\lambda\right)=6,75\cdot\frac{y^{0,55}}{x^{0,55}}-56\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \frac{6,75}{56}\cdot\frac{y^{0,55}}{x^{0,55}}=\lambda$$

$$L_y\left(x,y,\lambda\right)=8,25\cdot\frac{x^{0,45}}{y^{0,45}}-64\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \frac{8,25}{64}\cdot\frac{x^{0,45}}{y^{0,45}}=\lambda$$

$$\xrightarrow{\text{Gleichsetzen}} \quad \frac{6,75}{56}\cdot\frac{y^{0,55}}{x^{0,55}}=\frac{8,25}{64}\cdot\frac{x^{0,45}}{y^{0,45}} \quad\rightarrow\quad y=\frac{8,25}{64}\cdot\frac{56}{6,75}\cdot x \quad\rightarrow\quad y=1,07x$$

$$\xrightarrow[\text{in NB}]{\text{Austauschverhältnis}} \quad 8.800=56x+64\cdot 1,07x \quad\rightarrow\quad 8.800=124,48x \quad\rightarrow\quad x=70,7$$

$$\rightarrow\quad y=1,07x \quad\rightarrow\quad y=1,07\cdot 70,7=75,6$$

$$\rightarrow\quad f\left(x,y\right)=15\cdot 70,7^{0,45}\cdot 75,6^{0,55}=1.100,66$$

$$\lambda=\frac{6,75}{56}\cdot\frac{75,6^{0,55}}{70,7^{0,55}} \quad\rightarrow\quad \lambda=0,1251 \quad\xrightarrow{b=+50}\quad \Delta f=0,1251\cdot 50\approx 6,26$$

$$f_{neu}=1.100,66+6,26=1.106,92$$

(4) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen

Der Unternehmer Kuno Storchenfuß agiert mit der Umsatz-Funktion

$$u\left(x\right)=-3x^3+114x^2+424x\,.$$

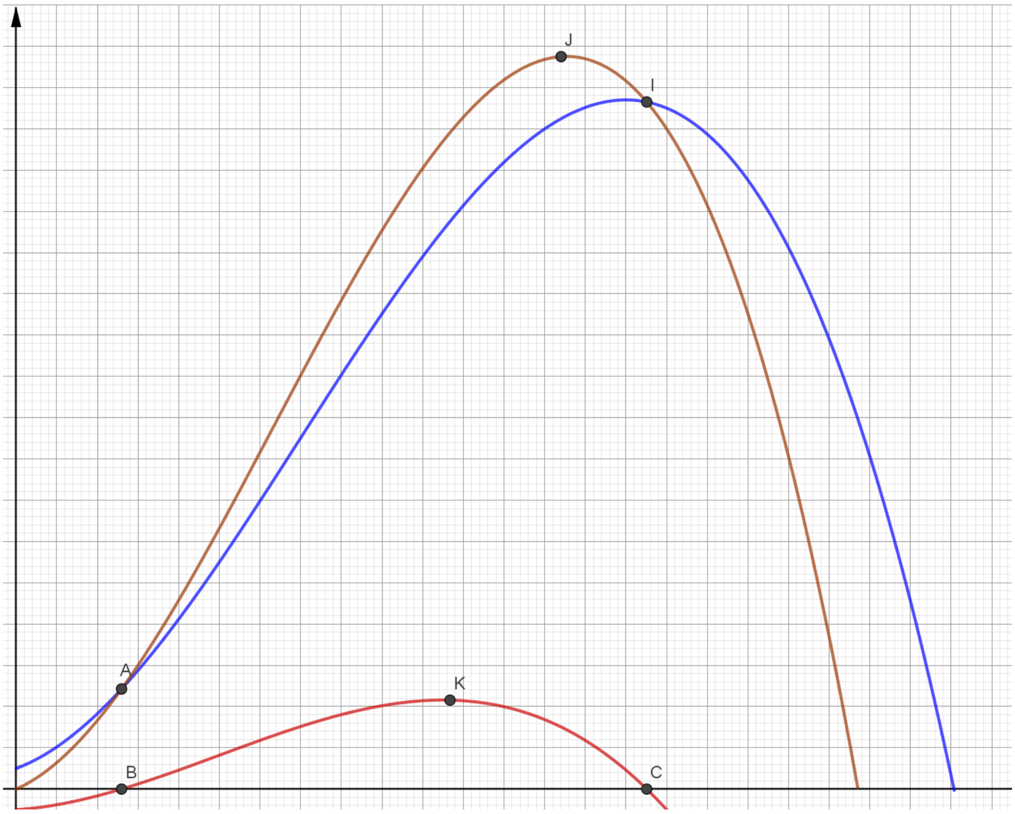
Die Gesamtkosten der Produktion belaufen sich nach eingehenden Analysen auf

$$K_{ges}(x) = \left(\vec{k}_{ges}\right)^T\cdot\vec{m}_x+K_{fix}$$

$$\vec{m}_x = \begin{pmatrix}64x\\ 8x^2-0,2x^3\\ x^2+10x\end{pmatrix} \quad\text{mit } x_{Def}\in\left[0\,;50\right] \quad\text{und}\quad \vec{k}_{ges}=\begin{pmatrix}5\\10\\4\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad K_{fix}=1.000$$

Die hergestellte Menge x wird auch komplett zur jeweiligen Preis-Absatz-Funktion p(x) abgesetzt.

- ⇨ beschriften Sie Skalen des Koordinatensystems und die drei Funktionen
- ⇨ berechnen Sie die Koordinaten der angezeigten Punkte und benennen Sie diese mit geeigneten Fachbegriffen



$$K_{ges}(x) = \left(\vec{k}_{ges}\right)^T \cdot \vec{m}_x + K_{fix}$$

$$\vec{m}_x = \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_{Def} \in [0;50] \quad \text{und} \quad \vec{k}_{ges} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{fix} = 1.000$$

$$K_{ges}(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} + 1000 = (5 \quad 10 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} + 1000$$

$$K_{ges}(x) = (5 \quad 10 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} + 1000 = 5 \cdot 64x + 10 \cdot 8x^2 - 10 \cdot 0{,}2x^3 + 4 \cdot x^2 + 4 \cdot 10x + 1000$$

$$K_{ges}(x) = 320x + 80x^2 - 2x^3 + 4 \cdot x^2 + 40x + 1000 = -2x^3 + 84x^2 + 360x + 1000$$

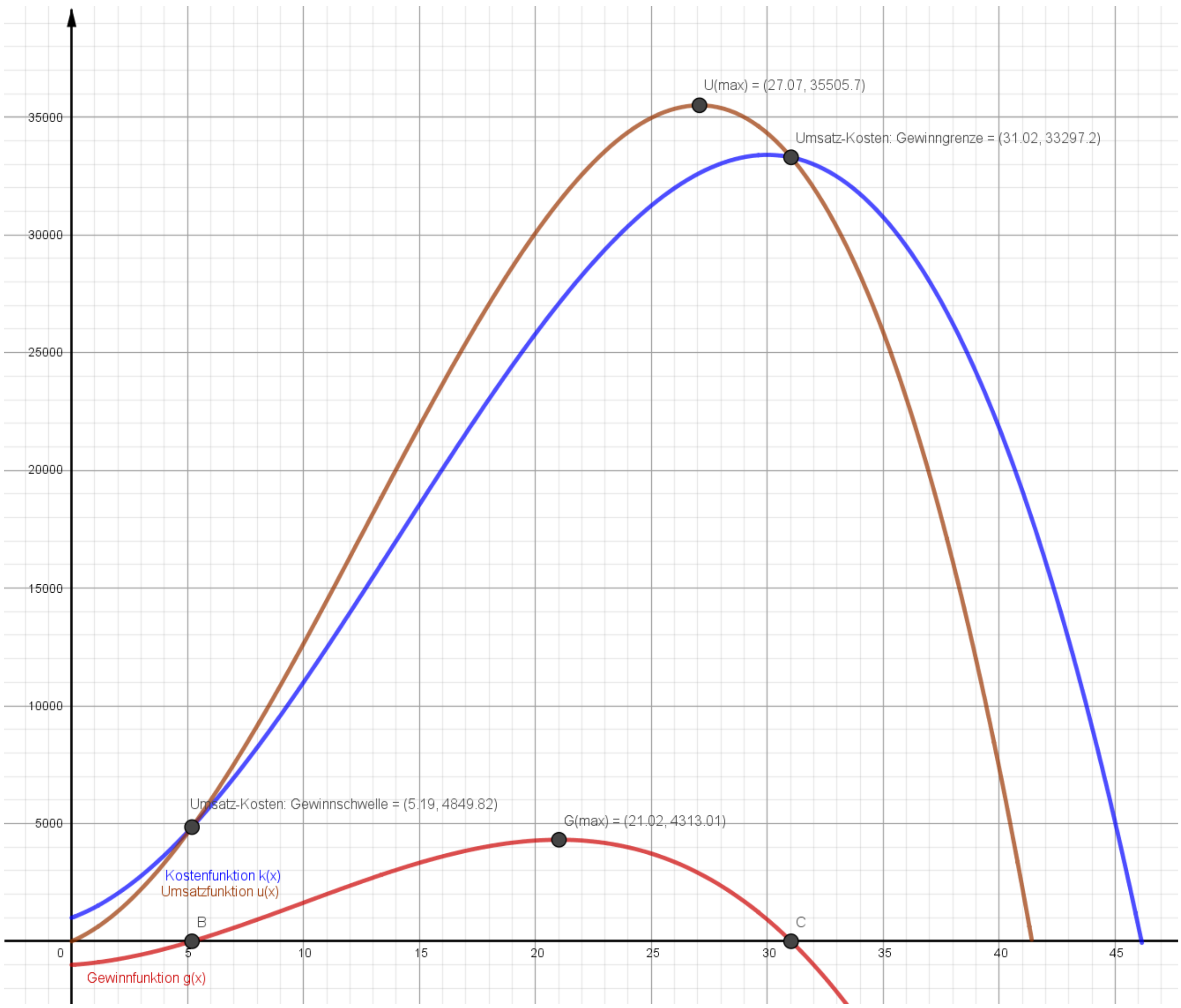
$$u(x) = -3x^3 + 114x^2 + 424x$$

Gewinnfunktion:

$$g(x) = u(x) - k(x)$$

$$g(x) = -3x^3 + 114x^2 + 424x - \left(-2x^3 + 84x^2 + 360x + 1000\right)$$

$$g(x) = -3x^3 + 114x^2 + 424x + 2x^3 - 84x^2 - 360x - 1000 = -x^3 + 30x^2 + 64x - 1000$$



U(max) = (27.07, 35505.7)
Umsatz-Kosten: Gewinngrenze = (31.02, 33297.2)
Umsatz-Kosten: Gewinnschwelle = (5.19, 4849.82)
G(max) = (21.02, 4313.01)
Kostenfunktion k(x)
Umsatzfunktion u(x)
Gewinnfunktion g(x)
B
C
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45

(5) **Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen**

Der Unternehmer Kuno Storchenfuß agiert mit der Umsatz-Funktion

$$u(x) = -4x^3 + 140x^2 + 500x\,.$$

Die Gesamtkosten der Produktion belaufen sich nach eingehenden Analysen auf

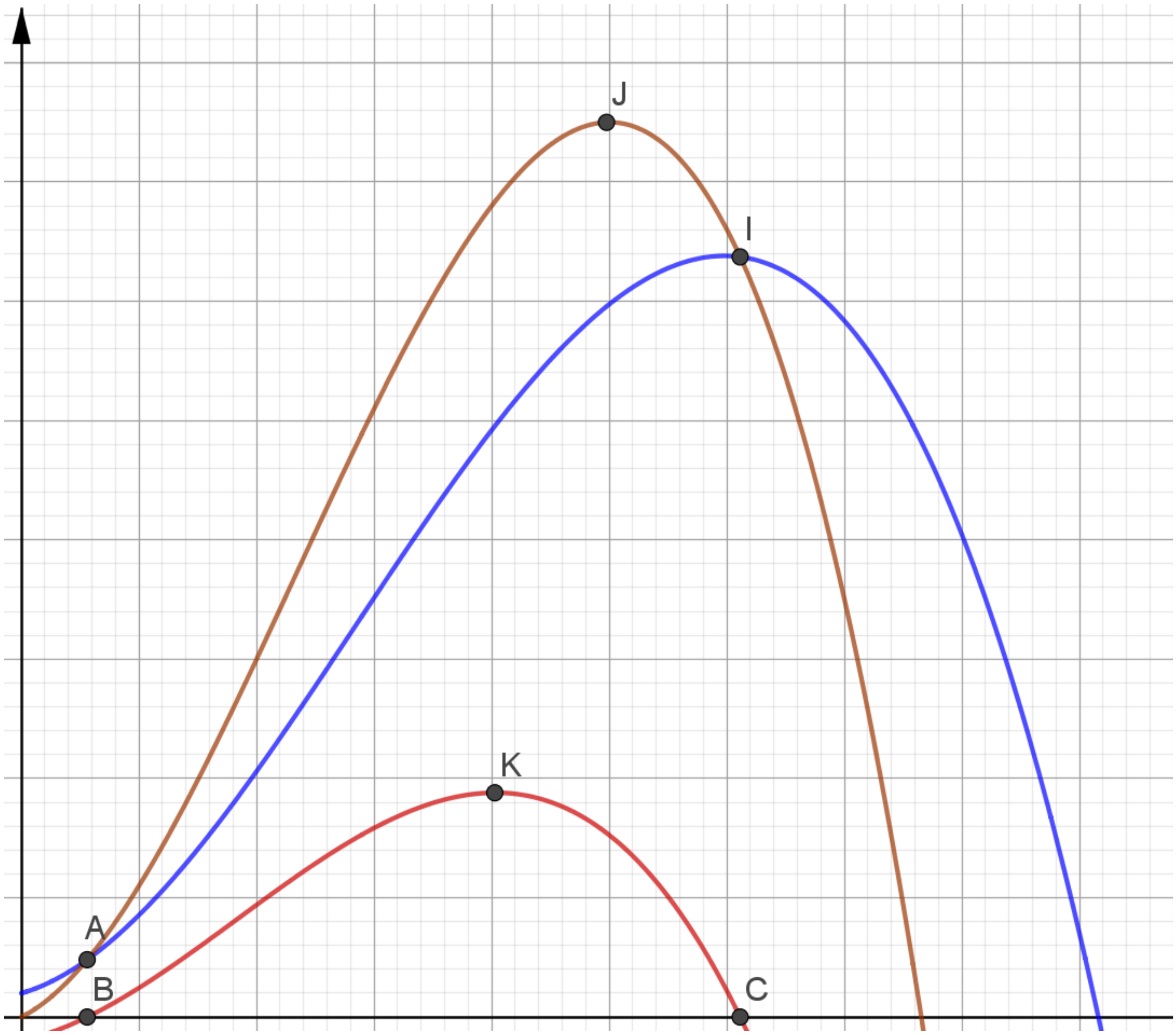
$$K_{ges}(x) \;=\; \left(\vec{k}_{ges}\right)^T \cdot \vec{m}_x + K_{fix}$$

$$\vec{m}_x \;=\; \begin{pmatrix} 60x \\ 4x^2 - 0{,}1x^3 \\ x^2 + 8x \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_{Def} \in [0\,;50] \quad \text{und} \quad \vec{k}_{ges} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{fix} = 1.000$$

Die hergestellte Menge x wird auch komplett zur jeweiligen Preis-Absatz-Funktion p(x) abgesetzt.

⇨ beschriften Sie Skalen des Koordinatensystems und die drei Funktionen

⇨ berechnen Sie die Koordinaten der angezeigten Punkte und benennen Sie diese mit geeigneten Fachbegriffen



$$K_{ges}(x) = \left(\vec{k}_{ges}\right)^T \cdot \vec{m}_x + K_{fix}$$

$$\vec{m}_x = \begin{pmatrix} 60x \\ 4x^2 - 0{,}1x^3 \\ x^2 + 8x \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_{Def} \in [0;50] \quad \text{und} \quad \vec{k}_{ges} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{fix} = 1.000$$

$$K_{ges}(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0,2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} + 1000 = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60x \\ 4x^2 - 0{,}1x^3 \\ x^2 + 8x \end{pmatrix} + 1000$$

$$K_{ges}(x) = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60x \\ 4x^2 - 0{,}1x^3 \\ x^2 + 8x \end{pmatrix} + 1000 = 4 \cdot 60x + 20 \cdot 4x^2 - 20 \cdot 0{,}1x^3 + 5 \cdot x^2 + 5 \cdot 8x + 1000$$

$$K_{ges}(x) = 240x + 80x^2 - 2x^3 + 5x^2 + 40x + 1000 = -2x^3 + 85x^2 + 280x + 1000$$

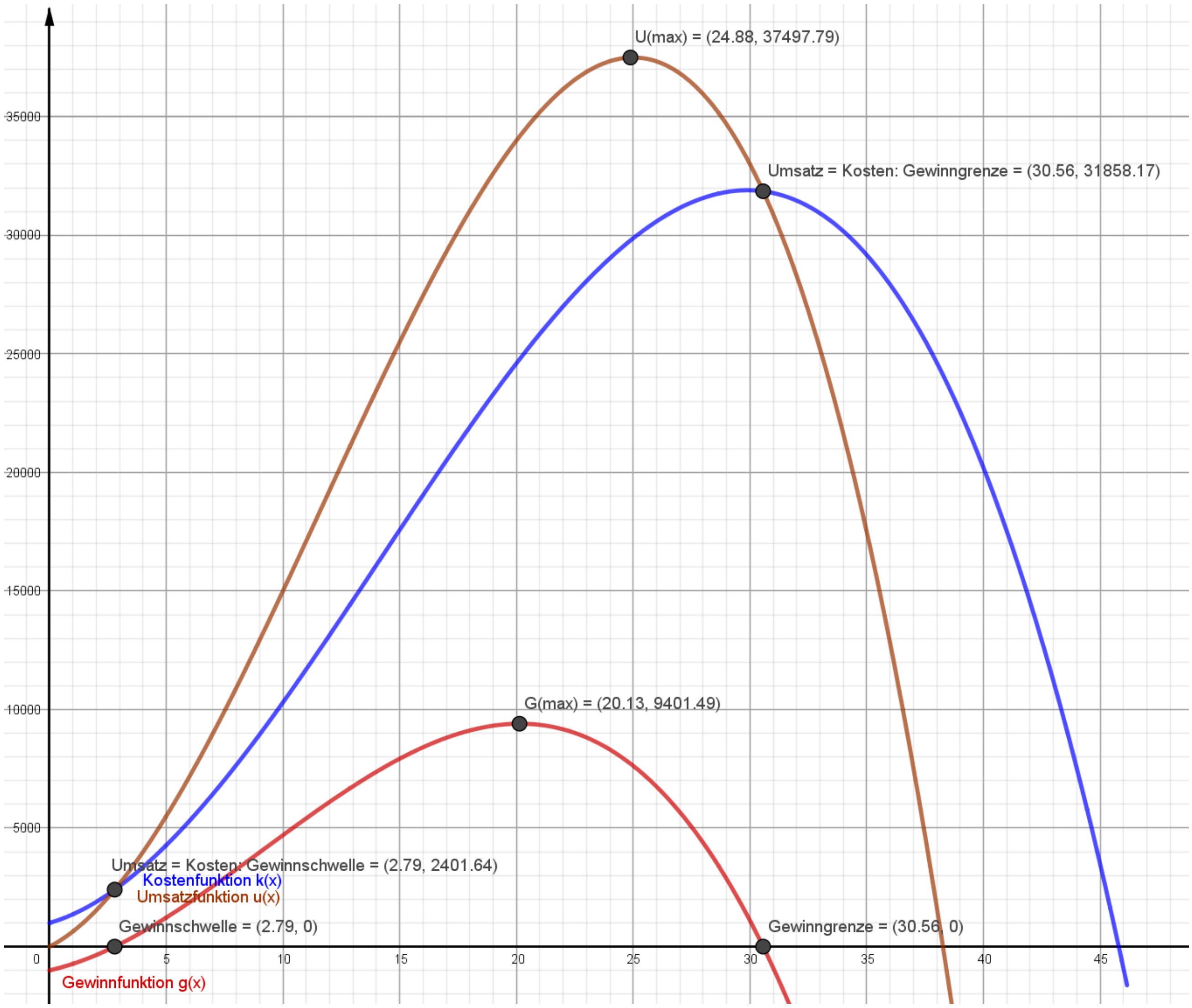
$$u(x) = -4x^3 + 140x^2 + 500x$$

Gewinnfunktion:

$$g(x) = u(x) - k(x)$$

$$g(x) = -4x^3 + 140x^2 + 500x - \left(-2x^3 + 85x^2 + 280x + 1000\right)$$

$$g(x) = -4x^3 + 140x^2 + 500x + 2x^3 - 85x^2 - 280x - 1000 = -2x^3 + 55x^2 + 220x - 1000$$



(6) Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung

Ein Unternehmen der chemischen Industrie verarbeitet die drei Rohstoffe zu drei Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 mit unterschiedlichen Eigenschaften.

Aus diesen Zwischenprodukten stellt das Unternehmen die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 zur Beschichtung von Textilien her.

Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den Tabellen zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	3	4	1
R_2	1	3	2
R_3	0	2	0

	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	1	3
Z_2	1	1	0
Z_3	0	2	1

a) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix.

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Im Lager befinden sich 17.200 ME von R_1, 11.400 ME von R_2 und 2.600 ME von R_3, die zu Endprodukten verarbeitet werden.
Wie viele ME von R_1 bleiben übrig, wenn die Rohstoffe R_2 und R_3 vollständig verbraucht werden und 600 ME von E_3 hergestellt werden?

$$M_{RE} \cdot \vec{e} = \vec{r} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.200 \\ 11.400 \\ 2.600 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7e_1 + 9e_2 + 6000 \\ 4e_1 + 8e_2 + 3000 \\ 2e_1 + 2e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.200 \\ 11.400 \\ 2.600 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7e_1 + 9e_2 \\ 4e_1 + 8e_2 \\ 2e_1 + 2e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.200 \\ 8.400 \\ 2.600 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix} \rightarrow r_1 = 7 \cdot 500 + 9 \cdot 800 = 10.700 \xrightarrow{Rest} 500$$

c) Im folgenden Jahr sollen von E_2 50 ME mehr als von E_1, von E_3 50 ME weniger als von E_1 produziert werden. Der Zwischenproduktvorrat in ME beträgt nun
$\mathbf{z} = (10k - 200 \,;\, 3k + 250 \,;\, k^2 - 56.170)^T$ mit $k \geq 30$.
Kann der Vorrat vollständig verbraucht werden?

$$M_{ZE}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\x+50\\x-50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10k-200\\3k+250\\k^2-56.170\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad k=240$$

$Re\,chenweg:$

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\x+50\\x-50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x+50+3x-150\\x+x+50\\2x+100+x-50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x-100\\2x+50\\3x+50\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}5x-100\\2x+50\\3x+50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10k-200\\3k+250\\k^2-56.170\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{ll}i) & 5x-10k=-100\\ii) & 2x-3k=200\end{array}$$

$$\xrightarrow[ii\cdot 5]{i\cdot 2}\left.\begin{array}{ll}i) & 10x-20k=-200\\ii) & 10x-15k=1.000\end{array}\right\}\xrightarrow{ii-i}5k=1200\rightarrow k=240\rightarrow x=460$$

Probe für Zeile iii): $3x+50=k^2-115.000\rightarrow 3\cdot 460+50=240^2-56.170\rightarrow 1.430=1.430$

d) Es ist folgender Vorrat an Zwischenprodukten vorhanden: $\vec{z}=\begin{pmatrix}1.700\\1.100\\600\end{pmatrix}$

Wie viele **Endprodukte E_1 und E_2** können hergestellt werden, wenn das Lager danach vollständig leer sein soll und von **E_3 200 ME hergestellt** werden müssen?

$$M_{ZE}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.700\\1.100\\600\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}e_1+e_2+600&=&1.700\\e_1+e_2&=&1.100\\2e_2+200&=&600\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}e_1+e_2+600&=&1.700\\e_1+e_2&=&1.100\\2e_2&=&400\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,3}e_2=200\xrightarrow{Zeile\,2}e_1=900\xrightarrow{Probe\,Zeile\,1}e_1+e_2+600=1.700\ \boxtimes$$

e) 1 ME von R_1 kostet 2 GE, 1 ME von R_2 kostet 4 GE , 1 ME von R_3 kostet 8 GE

=> $\vec{p_R}=\begin{pmatrix}2&4&8\end{pmatrix}$

Die Fertigung von **je 1 ME** der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen und von **je 1 ME** der Endprodukte aus den Zwischenprodukten werden durch folgende Preis-Vektoren dargestellt:

$$\vec{p_Z}=\begin{pmatrix}3&4&2\end{pmatrix}\quad und\quad \vec{p_E}=\begin{pmatrix}10&32&12\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie **die Gesamtherstellungskosten für je 1 ME der Endprodukte**.

$$Kosten=\overrightarrow{p_R}\cdot M_{RE}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{p_Z}\cdot M_{ZE}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{p_E}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$Kosten=\begin{pmatrix}2&4&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&9&10\\4&8&5\\2&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&3\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&32&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$Kosten=\begin{pmatrix}2&4&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}26\\17\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&32&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$Kosten=52+68+32+15+8+6+10+32+12=235$$

(7) Matrizenrechnung: Leontief-Modell

Die Verflechtung dreier Werke A, B und C eines Chemieunternehmens untereinander und mit dem Markt wird durch das Leontief-Modell beschrieben.

Dabei gilt folgende Technologische Matrix T:

$$T = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0,4 & 0,4 & 0,05 \\ B & 0 & 0,3 & 0,25 \\ C & 0,2 & 0,12 & 0,1 \end{array}$$

a) Berechnen Sie die **Marktabgabe** $\vec{y}$ der Werke A, B und C, wenn **500 ME von A**, **300 ME von B** und **400 ME von C** produziert werden.

$$\vec{y} = (E-T)\vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 1-0,4 & -0,4 & -0,05 \\ 0 & 1-0,3 & -0,25 \\ -0,2 & -0,12 & 1-0,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 & -0,05 \\ 0 & 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 110 \\ 224 \end{pmatrix}$$

b) Erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle bzw. füllen Sie die Vorlage aus:

	A	B	C	Konsum	Produktion
A	200	120	20	$y_1 =$ 160	$x_1 =$ 500
B	0	90	100	$y_2 =$ 110	$x_2 =$ 300
C	100	36	40	$y_3 =$ 224	$x_3 =$ 400

c) Für einen kommenden Zeitraum wird mit dem Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 174 \\ 120 \\ 82 \end{pmatrix}$ gerechnet.

Bestimmen Sie den neuen zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

$$\vec{y} = (E-T)\vec{x} \rightarrow (E-T)^{-1}\cdot\vec{y} = \vec{x}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 & -0,05 \\ 0 & 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 174 \\ 120 \\ 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Alternative:

$$\begin{pmatrix} 174 \\ 120 \\ 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 & -0,05 \\ 0 & 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 478,65 \\ 254,05 \\ 231,35 \end{pmatrix}$$

d) Durch ein neues Produktionsverfahren ändern sich die **Koeffizienten a_{12} und a_{22}** der **Technologie-Matrix T**.

Außerdem soll die Produktion der Werke A, B und C auf das Verhältnis

$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 4 : 5$ umgestellt werden.

Der neue Marktvektor ist $\vec{y} = \begin{pmatrix} 220 \\ 150 \\ 382 \end{pmatrix}$

Ermitteln Sie die neue Technologie-Matrix T sowie den neuen Produktionsvektor $\vec{x}$.

$$T_{neu} = \begin{pmatrix} 0,4 & a_{12} & 0,05 \\ 0 & a_{22} & 0,25 \\ 0,2 & 0,12 & 0,1 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 220 \\ 150 \\ 382 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 4k \\ 5k \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = (E-T)\vec{x} \rightarrow \text{Lösung über LGS}$$

$$\vec{y} = (E-T)\vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} 220 \\ 150 \\ 382 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -a_{12} & -0,05 \\ 0 & 1-a_{22} & -0,25 \\ -0,2 & -0,12 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 4k \\ 5k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,3} -0,2k - 0,12 \cdot 4k + 0,9 \cdot 5k = 382 \rightarrow 382 = 3,82k \rightarrow k = 100$$

$$\rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 4k \\ 5k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,1} 60 - 400a_{12} - 25 = 220 \rightarrow -400a_{12} = 185 \rightarrow a_{12} = -0,4625$$

$$\xrightarrow{Zeile\,2} 400 - 400a_{22} - 125 = 150 \rightarrow 400a_{22} = 125 \rightarrow a_{22} = 0,3125$$

Anmerkung: ***Die Lösung für a_{12} ist nur innermathematisch sinnvoll – aber nicht ökonomisch.***

e) Ausgehend von der ursprünglichen Technologiematrix soll die Produktion der Werke A, B und C auf das Verhältnis

$x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 4 : 8$ umgestellt

und **insgesamt 1.000 ME** an den Markt abgegeben werden.

Berechnen Sie die **Marktabgabe** $\vec{y}$ aus den drei Zweigwerken A, B und C.

$$\vec{y} = (E-T)\vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 & -0,05 \\ 0 & 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & -0,12 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 4x \\ 8x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8x \\ 0,8x \\ 6,32x \end{pmatrix} \xrightarrow{x=158,2} \begin{pmatrix} -126,6 \\ 126,6 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{gesamt:1000[ME]} -0,8x + 0,8x + 6,32x = \quad 6,32x = 1000 \rightarrow x = \frac{1000}{6,32} = 158,2$$

Anmerkung: ***Die Lösung für x_1 = -126,6 ist nur innermathematisch sinnvoll – aber nicht ökonomisch.***