# Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Wirtschaftsmathematik

**Fakultät für Wirtschaft**

**Studiengang**: BWL-Öffentliche Wirtschaft-Wirtschaftsförderung  Datum: 26.01.2023

| **Matrikelnummer:** | | | | **Dozent: Jürgen Meisel** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Kurs: WOW22A/B** | | **Semester:** | 1 | | |
| **Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung** | | | | **Bearbeitungszeit: 60 min.** | |
| **Bewertung:** | Maximale Punktzahl: 60 | | | Erreichte Punktzahl: | |
| **Prozente:** | ................ | | | Signum: ................ | |
| **Anmerkungen:** | ***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.***<br><br>***<u>Bitte beachten:</u>***<br>***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.***<br>***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!*** | | | | |

| Nr | Thema der Aufgabe | max. Punkte | erreichte Punkte | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Matrizenrechnung: Übergänge und stat. GG** | 12 | | |
| 2 | **Diff.-Rg I (mehrere Var.): Extrema ohne NB** | 12 | | |
| 3 | **Diff.-Rg II (mehrere Var.): Extrema mit NB** | 12 | | |
| 4 | **Ökonomische Anwendung zur Diff.-Rg. (1 Variable)** | 12 | | |
| 5 | **Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung** | 12 | | |
| 6 | **Lineare Optimierung** | 12 | | |
| **Summe** | | 60 | | |

## (1) Matrizenrechnung: Übergänge und stat. Gleichgewicht

Ein E-Scooterverleih mit drei Standorten A, B und C verleiht tageweise E-Scooter, die morgens abgeholt und abends bei einer der drei Filialen wieder zurückgegeben werden müssen.
Die nachfolgende Übergangsmatrix stellt die Anteile dar, wie die **1.000 E-Scooter** täglich zwischen den Standorten „wandern":

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix}0,4 & 0,1 & c\\ 0,3 & 2b & c\\ a & 4b & 0,6\end{pmatrix}$$

Am 20.01.2023 konnte man folgende Verteilungsverhältnis feststellen: A : B : C entspricht 2 : 3 : 5

a) Vervollständigen Sie die Übergangsmatrix U[A, B, C] und erstellen Sie den Verteilungsvektor für die 1.000 E-Scoouter am 20.01.2023.

***Verwenden Sie nun für die kommenden Aufgaben folgende Angaben:***

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix}0,50 & 0,05 & 0,15\\ 0,25 & 0,80 & 0,15\\ 0,25 & 0,15 & 0,70\end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_0}=\begin{pmatrix}250\\450\\300\end{pmatrix}$$

b) Welche Werte sind am 21.01.2023 zu erwarten?

c) Wie waren denn die Werte am 19.01.2023?

d) Der Unternehmer überlegt sich, Standort B auszubauen – das würde sich aber nur lohnen, wenn bei gleichbleibendem Wechselverhalten langfristig mehr als 45 % der E-Scooter dort deponiert würden. Prüfen Sie die langfristige Entwicklung und geben Sie ein Entscheidungshilfe.

**LÖSUNG:**

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix}0,4 & 0,1 & c\\ 0,3 & 2b & c\\ a & 4b & 0,6\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a=0,3 \\ 6b=0,9 \rightarrow b=0,15 \\ 2c=0,4 \rightarrow c=0,2\end{matrix}$$

$$U\cdot\overrightarrow{p_0}=\overrightarrow{p_1} \quad\rightarrow\quad \overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}0,50 & 0,05 & 0,15\\ 0,25 & 0,80 & 0,15\\ 0,25 & 0,15 & 0,70\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}250\\450\\300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}192,5\\467,5\\340,0\end{pmatrix}$$

$$U\cdot\overrightarrow{p_{-1}}=\overrightarrow{p_0} \xrightarrow[Inverse]{Lösung\ per} \overrightarrow{p_{-1}}=\begin{pmatrix}0,50 & 0,05 & 0,15\\ 0,25 & 0,80 & 0,15\\ 0,25 & 0,15 & 0,70\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}250\\450\\300\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{p_{-1}}=\begin{pmatrix}400\\400\\200\end{pmatrix}$$

$$U\cdot\overrightarrow{p_{-1}}=\overrightarrow{p_0} \xrightarrow[LGS]{Lösung\ per} \begin{pmatrix}0,50 & 0,05 & 0,15\\ 0,25 & 0,80 & 0,15\\ 0,25 & 0,15 & 0,70\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}250\\450\\300\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{p_{-1}}=\begin{pmatrix}400\\400\\200\end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$U\cdot\vec{x}=\vec{x}\quad\rightarrow\quad(U-E)\cdot\vec{x}=\vec{0}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}-0,50 & 0,05 & 0,15\\ 0,25 & -0,20 & 0,15\\ 0,25 & 0,15 & -0,30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-0,50 & 0,05 & 0,15\\ 0,25 & -0,20 & 0,15\\ 0,25 & 0,15 & -0,30\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{entfällt}]{\text{3. Zeile}}\begin{pmatrix}-0,50 & 0,05 & 0,15\\ 0,25 & -0,20 & 0,15\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}3\\ 9\\ 7\end{pmatrix}$$

## (2) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingung(en)

Ermitteln Sie die **drei** stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y)\;=\;2x^2y-8xy+y^2+4$$

und untersuchen Sie **diese** auf ihre Extremwerteigenschaft.

Berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei der Extremwertstelle*** 😉

**LÖSUNG:**

$$f(x,y)\;=\;2x^2y-8xy+y^2+4$$

$$f_x(x,y)\;=\;4xy-8y=0\;\rightarrow\;y(4x-8)=0\;\rightarrow\;y=0\quad und\quad x=2$$

$$f_y(x,y)\;=\;2x^2-8x+2y=0$$

$$\xrightarrow{y=0}\;2x^2-8x=0\;\rightarrow\;(2x-8)x=0\;\rightarrow\;x_1=0\quad und\quad x_2=4$$

$$\xrightarrow{x=2}\;8-16+2y=0\;\rightarrow\;y=4$$

$$\rightarrow\;S_1(0\mid 0\mid f_1)\;\wedge\;S_2(4\mid 0\mid f_2)\;\wedge\;S_3(2\mid 4\mid f_3)$$

$$H(f)=\begin{pmatrix}4y & 4x-8\\ 4x-8 & 2\end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f)=\begin{pmatrix}0 & -8\\ -8 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Auswertung}}\begin{matrix}D_1=0 & indefinit\\ D_2=-64<0 & kein\ Extremum\end{matrix}$$

$$H_{S_2}(f)=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 8 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Auswertung}}\begin{matrix}D_1=0 & indefinit\\ D_2=-64<0 & kein\ Extremum\end{matrix}$$

$$H_{S_2}(f)=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Auswertung}}\begin{matrix}D_1=16>0 & positiv\ definit\\ D_2=32>0 & Min(2\mid 4\mid -12)\end{matrix}$$

**(3) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f\left(x,y\right)=2\cdot x^{0,6}\cdot y^{0,4}$

Eine Mengeneinheit für **x kostet 3,60 GE**, der Preis für eine Mengeneinheit von **y liegt bei 4,00 GE**.

Insgesamt steht ein Budget von **b = 1.200,00** GE zur Verfügung.

a) Bestimmen Sie die optimale Produktion mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um **100** GE erhöht?

c) Um welchen Wert müsste das Budget reduziert werden, wenn man ausgehend von der Maximalberechnung nur 300 ME produzieren möchte?

**LÖSUNG:**

$$L\left(x,y,\lambda\right)=2\cdot x^{0,6}\cdot y^{0,4}+\lambda\left(1.200-3,6x-4y\right)$$

$$L_x\left(x,y,\lambda\right)=1,2\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}-3,6\lambda=0\quad\rightarrow\quad\lambda=\frac{1}{3}\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}$$

$$L_y\left(x,y,\lambda\right)=0,8\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}-4\lambda=0\quad\rightarrow\quad\lambda=\frac{1}{5}\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}$$

$$\xrightarrow{\text{Gleichsetzen}}\quad\frac{1}{3}\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}\quad\rightarrow\quad y=\frac{3}{5}x$$

$$\xrightarrow[\text{in NB}]{\text{Austauschverhältnis}}\quad 1.200=3,6x+4\cdot\frac{3}{5}x\quad\rightarrow\quad 1.200=6x$$

$$\rightarrow\quad x=200\quad\xrightarrow{y=\frac{3}{5}x}\quad y=120\quad\rightarrow\quad f\left(200\mid 120\right)=2\cdot 200^{0,6}\cdot 120^{0,4}=326,08$$

$$\lambda=\frac{1}{3}\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{120^{0,4}}{200^{0,4}}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{0,4}=0,27173$$

$$\rightarrow\quad\lambda=0,27173\quad\xrightarrow{b=+100}\quad\Delta f=0,27173\cdot 100\approx 27,173$$

$$\rightarrow\quad f_{neu}\quad=\quad 326,08+27,17\quad=\quad 353,25$$

$$\Delta f=\Delta b\cdot\lambda\quad\rightarrow\quad\Delta b=\frac{\Delta f}{\lambda}\quad\rightarrow\quad\Delta b=\frac{-26,08}{0,27173}=-95,98$$

**(4)** **Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen**

Der Unternehmer Kuno Storchenfuß agiert mit der Gesamtkosten-Funktion

$$k(x)=0,04x^3-0,5x^2+2,2x+10.$$

Die Preis-Absatzfunktion lautet $p(x)=16-0,25x^2$

a) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

b) Ermitteln Sie das Gewinnmaximum und die max. Produktionsmenge.

c) Berechnen Sie den Cournot-Punkt.

d) Bei welcher Produktionsmenge liegt das Minimum der Durchschnittskosten?

e) Wie lauten Höchstpreis und Sättigungmenge der Marktsituation?

**LÖSUNG:**

$$k(x)=0,04x^3-0,5x^2+2,2x+10 \quad und \quad p(x)=16-0,25x^2$$

$$g(x)=p(x)\cdot x-k(x)=u(x)-k(x)$$

$$g(x)=16x-0,25x^3-\left(0,04x^3-0,5x^2+2,2x+10\right)$$

$$g(x)=-0,29x^3+0,5x^2+13,8x-10=0 \quad\to\quad G-Schwelle: x_1=0,71 \quad und \quad G-Grenze: x_2=7,47$$

$$g'(x)=-0,87x^2+x-13,8=0 \quad\to\quad x=4,6 \quad\to\quad g(4,6)=35,83$$

$$g''(x)=-1,74x+1 \quad\to\quad g''(4,6)=-1,74\cdot 4,6+1<0 \quad\to\quad G_{\max}(4,6 \mid 35,83)$$

$$p(4,6)=16-0,25\cdot 4,6^2=10,71 \quad\to\quad C(4,6 \mid 10,71)$$

$$k(x)=0,04x^3-0,5x^2+2,2x+10$$

$$DK(x)=\frac{k(x)}{x} \quad\to\quad DK(x)=\frac{0,04x^3-0,5x^2+2,2x+10}{x}=0,04x^2-0,5x+2,2+\frac{10}{x}$$

$$\to\quad \left[DK(x)\right]'=0,08x-0,5-\frac{10}{x^2}=0 \quad\to\quad 0,08x^3-0,5x^2-10=0 \quad\to\quad x=8,14$$

$$\to\quad \left[DK(x)\right]''=0,08+\frac{20}{x^3} \quad\to\quad \left[DK(8,14)\right]''=0,08+\frac{20}{8,14^3}>0 \quad\to\quad Min\ bei\ x=8,14$$

$$p(x)=16-0,25x^2$$

$$Höchstpreis: \quad p(0)=16$$

$$Sättigungsmenge: \quad p(x)=16-0,25x^2=0 \quad\to\quad x=8$$

## (5) Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung

Ein Betrieb produziert aus den Rohstoffen $R_1$, $R_2$ und $R_3$ die drei Zwischenprodukte $Z_1$, $Z_2$ und $Z_3$ und daraus die beiden Endprodukte $E_1$ und $E_2$ her.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den Matrizen zu entnehmen.

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad und \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Bedarf an Zwischenprodukten und Rohstoffen, wenn eine Endproduktbestellung von $\vec{e} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$ vorliegt.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix $M_{RZ}$ regulär ist.

Es ist folgender Vorrat an Zwischenprodukten vorhanden: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 260 \\ 20 \\ 120 \end{pmatrix}$

c) Wie viele **Endprodukte $E_1$ und $E_2$** können hergestellt werden, wenn das Lager danach vollständig leer sein soll?

d) Gesucht ist jetzt die notwendige Mindestmenge an Zwischenprodukten, wenn eine Bestellung von Endprodukten im **Verhältnis $E_1 : E_2$ => 4 : 5** realisiert werden soll und **bereits 1.300 ME von $Z_3$** vorrätig sind.
***Weitere Zukäufe von $Z_3$ sollen keine erfolgen.***

**LÖSUNG:**

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} = M_{RE} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 14 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$M_{RE} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 14 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 510 \\ 1.300 \\ 1.270 \end{pmatrix}$$

$$M_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230 \\ 50 \\ 160 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{RZ}) = \det \left( \begin{array}{ccc:c:c} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow 24 + 12 + 0 - 0 - 16 - 6 = 14 \neq 0 \rightarrow M_{RZ} \textit{ regulär}$$

$$M_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 20 \\ 120 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 20 \\ 120 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$M_{ZE}\cdot\vec{e}=\vec{z}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3\\1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4a\\5a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\1.300\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}19a\\4a\\13a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\1.300\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a=100\rightarrow\vec{e}=\begin{pmatrix}400\\500\end{pmatrix}\rightarrow\vec{z}=\begin{pmatrix}19a\\4a\\13a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.900\\400\\1.300\end{pmatrix}$$

**(6)** **Lineare Optimierung**

Gegeben sei ein System aus Nebenbedingungen und einer Zielfunktion:

$$\begin{array}{ll}(i) & 2x+y\le 200\\(ii) & x+y\le 120 \qquad und \quad ZF: g(x,y)=2x+3y \;\rightarrow\; \max.\\(iii) & x+3y\le 240\end{array}$$

a) Nutzen Sie zur Lösung/Berechnung den Aufbau des gegebenen Tableaus.
Führen Sie die notwendigen Umformungen durch, um auf **Tableau 1** zu gelangen.

b) Nach einigen Umformungsschritten mittels Simplexalgorithmus gelangen Sie (hoffentlich) auf folgendes **Tableau 1**:

| | x | y | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | b | Umformung |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **I** | $\frac{5}{3}$ | **0** | **1** | **0** | $-\frac{1}{3}$ | **120** | |
| **II** | $\frac{2}{3}$ | **0** | **0** | **1** | $-\frac{1}{3}$ | **40** | |
| **III** | $\frac{1}{3}$ | **1** | **0** | **0** | $\frac{1}{3}$ | **80** | |
| **ZF** | **1** | **0** | **0** | **0** | **- 1** | **G - 240** | |

**(i)** **Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?**

**(ii)** **Wie würde die aktuelle Lösung gemäß Tableau 1 lauten und welcher Gewinn würde erzielt?**

c) Erstellen Sie nun ausgehend von **Tableau 1** das Endtableau, geben Sie die vollständige Lösung an und begründen Sie, warum nun ein Maximum vorliegen muss.

**LÖSUNG:**

| | x | y | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | b | Umformung |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 200 | |
| II | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 120 | |
| III | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 240 | (iii) / 3 |
| ZF | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | G | |
| | | | | | | | |
| I | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 200 | (i) – (iii) |
| II | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 120 | (ii) – (iii) |
| III | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 80 | |
| ZF | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | G | (ZF) – 3(iii) |
| | | | | | | | |
| I | $\frac{5}{3}$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 120 | |
| II | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | 40 | |
| III | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 80 | |
| ZF | 1 | 0 | 0 | 0 | - 1 | G - 240 | |
| | | | | | | | |

**(i)** **Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?**

**(ii)** **Wie würde die aktuelle Lösung gemäß Tableau 1 lauten und welcher Gewinn würde erzielt?**

**Es muss weiter gerechnet werden, da in der ZF-Zeile noch ein positiver Wert enthalten ist.**

$$L_{Zwischen} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \\ 40 \end{pmatrix} \right\} \quad mit \quad G_{Zwischen} = 240$$

| | x | y | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | b | Umformung |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | $\frac{5}{3}$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 120 | |
| II | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | 40 | $\frac{3}{2}\cdot(ii)$ |
| III | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 80 | |
| ZF | 1 | 0 | 0 | 0 | - 1 | G - 240 | |
| | | | | | | | |
| I | $\frac{5}{3}$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 120 | $(i)-\frac{5}{3}\cdot(ii)$ |
| II | 1 | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 60 | |
| III | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 80 | $(iii)-\frac{1}{3}\cdot(ii)$ |
| ZF | 1 | 0 | 0 | 0 | - 1 | G - 240 | $(ZF)-(ii)$ |
| | | | | | | | |
| I | 0 | 0 | 1 | $-\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 20 | |
| II | 1 | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 60 | |
| III | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 60 | |
| ZF | 0 | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | G - 300 | |

$$L=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\u_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\60\\20\end{pmatrix}\right\}\quad mit\quad G_{\max}=300$$