(1) Matrizenrechnung: Übergänge und stat. Gleichgewicht

Gegeben Übergangsmatrix: $U[A,B,C]=\begin{pmatrix} 0,22 & b & c \\ 0,42 & 6b & 5c \\ a^2 & b & 0,4 \end{pmatrix}$

Im letzten Monat des Jahres 2022 konnte man folgende Verteilungsverhältnis feststellen:
A : B : C entspricht 1 : 10 : 9

a) Vervollständigen Sie die Übergangsmatrix U[A, B, C] und erstellen Sie den Verteilungsvektor für die 2.000 Personen als Grundgesamtheit.

b) Welche Werte sind im Januar und Februar 2023 zu erwarten?

c) Wie waren denn die Werte im November 2022?
Können diese ermittelt werden aufgrund der Datenbasis?

d) Der Unternehmer überlegt sich, Standort C auszubauen – das würde sich aber nur lohnen, wenn bei gleichbleibendem Wechselverhalten langfristig mehr als 35 % der Grundgesamtheit dort anzutreffen wäre. Entscheidung?

Lösung:

$$a^2=0,36 \quad\rightarrow\quad a=0,6 \qquad 8b=1 \quad\rightarrow\quad b=0,125 \qquad 6c=0,6 \quad\rightarrow\quad c=0,1$$

$$\overrightarrow{p_0}=\begin{pmatrix} 100 \\ 1.000 \\ 900 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,5 \\ 0,45 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 0,22 & 0,125 & 0,1 \\ 0,42 & 0,75 & 0,5 \\ 0,36 & 0,125 & 0,4 \end{pmatrix}$$

U*p0

#3: $\begin{bmatrix} 0.22 & 0.125 & 0.1 \\ 0.42 & 0.75 & 0.5 \\ 0.36 & 0.125 & 0.4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.5 \\ 0.45 \end{bmatrix}$

#4: $\begin{bmatrix} 0.1185 \\ 0.621 \\ 0.2605 \end{bmatrix}$

U*p1

#5: $\begin{bmatrix} 0.22 & 0.125 & 0.1 \\ 0.42 & 0.75 & 0.5 \\ 0.36 & 0.125 & 0.4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.1185 \\ 0.621 \\ 0.2605 \end{bmatrix}$

#6: $\begin{bmatrix} 0.129745 \\ 0.64577 \\ 0.224485 \end{bmatrix}$

U*p(-1) = p0

#7: $\begin{bmatrix} 0.22 & 0.125 & 0.1 \\ 0.42 & 0.75 & 0.5 \\ 0.36 & 0.125 & 0.4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.5 \\ 0.45 \end{bmatrix}$

#10: $a = -0.390625 \wedge b = -0.125 \wedge c = 1.515625$

#12: $\begin{bmatrix} -0.78 & 0.125 & 0.1 \\ 0.42 & -0.25 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

#13: $\frac{39 \cdot x}{50} - \frac{y}{8} - \frac{z}{10} = 0 \wedge \frac{21 \cdot x}{50} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 0 \wedge x + y + z = 1$

#14: $\text{APPROX}\left(\text{SOLVE}\left(\frac{39 \cdot x}{50} - \frac{y}{8} - \frac{z}{10} = 0 \wedge \frac{21 \cdot x}{50} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 0 \wedge x + y + z = 1, [x, z, y]\right)\right)$

#15: $x = 0.1321752265 \wedge z = 0.2152567975 \wedge y = 0.6525679758$

#16: $\frac{39 \cdot x}{50} - \frac{y}{8} - \frac{z}{10} = 0 \wedge \frac{21 \cdot x}{50} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 0 \wedge x + y + z = 1$

#17: $\text{SOLVE}\left(\frac{39 \cdot x}{50} - \frac{y}{8} - \frac{z}{10} = 0 \wedge \frac{21 \cdot x}{50} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 0 \wedge x + y + z = 1, [x, y, z]\right)$

#18: $x = \frac{175}{1324} \wedge y = \frac{216}{331} \wedge z = \frac{285}{1324}$

(2) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingung(en)

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 - 5xy + \frac{1}{4}x^2 - 6$$

und untersuchen Sie diese_auf ihre Extremwerteigenschaft.
Berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei Extremwertstellen*** 😉

$$f(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 - 5xy + \frac{1}{4}x^2 - 6$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - 5y + \frac{1}{2}x = 0$$

$$f_y(x,y) = xy - 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x(y-5) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y = 5$$

$$Fall\ 1: \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad f_x(0,y) = \frac{1}{2}y^2 - 5y + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}y - 5\right)y = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 0 \quad \vee \quad y_2 = 10$$

$$\rightarrow \quad S_1(0 \quad 0 \quad f_1) \quad und \quad S_2(0 \quad 10 \quad f_2)$$

$$Fall\ 2: \quad y = 5 \quad \rightarrow \quad f_x(x,5) = \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + \frac{1}{2}x = 0 \quad \rightarrow \quad -12{,}5 + \frac{1}{2}x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 25 \quad \rightarrow \quad S_3(25 \quad 5 \quad f_3)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & y-5 \\ y-5 & x \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{xx} = 0{,}5 > 0 & indefinit \\ \det(H) = -25 < 0 & SP \end{matrix} \quad und \quad H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{xx} = 0{,}5 > 0 & indefinit \\ \det(H) = -25 < 0 & SP \end{matrix}$$

$$H_{S_3}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{xx} = 0{,}5 > 0 & positiv\ definit \\ \det(H) = 12{,}5 > 0 & Min(25 \quad 5 \quad f_3) \end{matrix}$$

(3) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) = 4 \cdot x^{0,25} \cdot y^{0,75}$

Eine Mengeneinheit für **x kostet 10 GE**, der Preis für eine Mengeneinheit von **y liegt bei 12 GE**.

Insgesamt steht ein Budget von **b = 8.000 GE** zur Verfügung.

a) Bestimmen Sie die optimale Produktion mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um **500** GE verringert?

$$L(x,y,\lambda) = 4 \cdot x^{0,25} \cdot y^{0,75} + \lambda(8.000 - 10x - 12y)$$

$$\left.\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} - 10\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{10} \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} \\ L_y(x,y,\lambda) &= 3 \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} - 12\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{1}{10} \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \\ y &= 2,5x \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[in\ NB]{y=2,5x} \quad 8.000 = 10x + 12y \quad \xrightarrow{y=2,5x} \quad 8.000 = 10x + 12 \cdot 2,5x \quad \rightarrow \quad 8.000 = 40x$$

$$\rightarrow \quad x = 200 \quad \xrightarrow{y=2,5x} \quad y = 500 \quad \rightarrow \quad f(200;500) = 4 \cdot 200^{0,25} \cdot 500^{0,75} \approx 1.590$$

$$\lambda = \frac{1}{10} \cdot \frac{500^{0,75}}{200^{0,75}} \approx 0,1988 \quad \xrightarrow{\Delta b = -500} (-500) \cdot 0,1988 = \Delta f \approx -99,4 \quad \rightarrow \quad f_{neu} = 1.590 - 99,4 = 1.490,6$$

(4) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen

Der Unternehmer Kuno Storchenfuß agiert mit der Gesamtkosten-Funktion

$$k(x) = 0,02x^3 - 0,3x^2 + 2x + 8.$$

Die Preis-Absatzfunktion lautet $p(x) = 14,4 - 0,1x^2$

a) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.
b) Ermitteln Sie das Gewinnmaximum und die max. Produktionsmenge.
c) Berechnen Sie den Cournot-Punkt.
d) Bei welcher Produktionsmenge liegt das Minimum der Durchschnittskosten?
e) Wie lauten Höchstpreis und Sättigungmenge der Marktsituation?

$$g(x) = p(x) \cdot x - k(x) \quad \to \quad g(x) = 14,4x - 0,1x^3 - \left(0,02x^3 - 0,3x^2 + 2x + 8\right)$$

$$\to \quad g(x) = 14,4x - 0,1x^3 - 0,02x^3 + 0,3x^2 - 2x - 8$$

$$\to \quad g(x) = -0,12x^3 + 0,3x^2 + 12,4x - 8$$

$$Gewinnschwelle/-grenze: \quad g(x) = -0,12x^3 + 0,3x^2 + 12,4x - 8 = 0$$

$$Gewinnschwelle: x = 0,64 \quad Gewinngrenze: x = 11,2$$

$$Gewinn\max imum:$$

$$g'(x) = -0,36x^2 + 0,6x + 12,4 = 0 \quad \to \quad x = 6,76$$

$$g''(x) = -0,72x + 0,6 \quad \to \quad g''(6,76) = -0,72 \cdot 6,76 + 0,6 < 0 \quad \to \quad MAX$$

$$Cournot-Punkt: \quad p(x) = 14,4 - 0,1x^2 \quad \to \quad p(6,76) = 14,4 - 0,1 \cdot 6,76^2 \approx 9,82[GE]$$

$$Minimum\ der\ Durchschnittskosten:$$

$$DK(x) = \frac{k(x)}{x} = \frac{0,02x^3 - 0,3x^2 + 2x + 8}{x} = 0,02x^2 - 0,3x + 2 + \frac{8}{x}$$

$$DK'(x) = 0,04x - 0,3 - \frac{8}{x^2} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot x^2} \quad 0,04x^3 - 0,3x^2 - 8 = 0 \quad \to \quad x = 9,65$$

$$DK''(x) = 0,04 + \frac{16}{x^3} > 0 \quad \to \quad MIN$$

$$Sättigungsmenge: \quad \to \quad p(x) = 14,4 - 0,1x^2 = 0 \quad \to \quad x = 12$$

$$Höchstpreis: \quad \to \quad p(0) = 14,4 - 0,1 \cdot 0 \quad \to \quad p(0) = 14,4$$

(5) Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung

Ein Betrieb produziert aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die zwei Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 her.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den Matrizen zu entnehmen.

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \quad und \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Bedarf an Zwischenprodukten und Rohstoffen, wenn eine Endproduktbestellung von $\vec{e} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix}$ vorliegt.

b) Bestimmen Sie die Determinante und die Inverse der Matrix M_{RE}.

Es ist folgender Vorrat an Rohstoffen vorhanden: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 299 \\ 479 \\ 598 \end{pmatrix}$

c) Wie viele **Endprodukte E_1, E_2 und E_3** können hergestellt werden, wenn das Lager danach vollständig leer sein soll und von **E_3 in jedem Fall 10 ME** produziert werden?

$$M_{ZE} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 115 \\ 245 \end{pmatrix}$$

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 1.195 \\ 1.915 \\ 2.390 \end{pmatrix}$$

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 16 & 19 & 14 \\ 26 & 31 & 22 \\ 32 & 38 & 28 \end{pmatrix} \rightarrow \det(M_{RE}) = 0 \rightarrow (M_{RE})^{-1} = nicht\ möglich$$

$$M_{RE} \cdot \vec{e} = \vec{r} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 & 19 & 14 \\ 26 & 31 & 22 \\ 32 & 38 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 \\ 479 \\ 598 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} i & 16e_1 + 19e_2 + 140 = 299 \\ ii & 26e_1 + 31e_2 + 220 = 479 \\ iii & 32e_1 + 38e_2 + 280 = 598 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} i & 16e_1 + 19e_2 = 159 \\ ii & 26e_1 + 31e_2 = 259 \\ iii & 32e_1 + 38e_2 = 318 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad und\ Probe \quad (iii) \quad 32e_1 + 38e_2 = 318 \rightarrow 32 \cdot 4 + 38 \cdot 5 = 318$$

(6) Lineare Optimierung

Gegeben sei ein System aus Nebenbedingungen und einer Zielfunktion:

$$\begin{array}{ll} (i) & \frac{1}{2}x + y \le 150 \\ (ii) & \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y \le 60 \qquad und \quad ZF: g(x,y) = \frac{5}{2}x + 4y \;\rightarrow\; \max . \\ (iii) & \frac{4}{5}x + \frac{11}{10}y \le 175 \end{array}$$

Lösen Sie das Problem graphisch **und** per Simplexalgorithmus.

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	$0,5$	1	1	0	0	150	
ii	$0,4$	$0,25$	0	1	0	60	$ii-\frac{1}{4}i$
iii	$0,8$	$1,1$	0	0	1	175	$iii-1,1i$
Z	$2,5$	4	0	0	0	G	$Z-4i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	$0,5$	1	1	0	0	150	
ii	$0,275$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$22,5$	
iii	$0,25$	0	$-1,1$	0	1	10	$iii\cdot 4$
Z	$0,5$	0	-4	0	0	$G-600$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	$0,5$	1	1	0	0	150	$i-0,5iii$
ii	$0,275$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$22,5$	$ii-0,275iii$
iii	1	0	$-4,4$	0	4	40	
Z	$0,5$	0	-4	0	0	$G-600$	$Z-0,5iii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	0	1	$3,2$	0	-2	130
ii	0	0	$-0,96$	1	$-1,1$	$11,5$
iii	1	0	$-4,4$	0	4	40
Z	0	0	$-1,8$	0	-2	$G-620$

$$\rightarrow \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 130 \\ 11,5 \end{pmatrix} \right\} \quad mit \quad G_{\max} = 620$$