Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: BWL-Öffentliche Wirtschaft-Wirtschaftsförderung Datum: 25.01.2024

Matrikelnummer:			**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW23A/B	**Semester:**	1		
Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung			**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 60		Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....		Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.*** ***<u>Bitte beachten:</u>*** ***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.*** ***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!***			

Nr	Thema der Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Matrizenrechnung: Übergänge und stat. GG	12		
2	Diff.-Rg I (mehrere Var.): Extrema ohne NB	12		
3	Diff.-Rg II (mehrere Var.): Extrema mit NB	12		
4	Diff.-Rg mit einer Variablen / Kurvenscharen	12		
5	Matrizenrechnung, Summen und Ableitungen	12		
6	Lineare Optimierung	12		
Summe		60		

(1) Matrizenrechnung: Übergänge und stat. Gleichgewicht

Im Vorfeld der kommenden Landtagswahlen hat das Marktforschungsunternehmen **KreuzAn** eine regionale Erhebung der Wählerströme zwischen den drei am Ort ansässigen Parteien durchgeführt, um eine Prognose abgeben zu können.
Die Veränderungen sind in der Tabelle dargestellt:

	(A)lleSindEins	(B)esseralsAlle	(D)oppelWumms
A	**0,7**	**b => 0,25**	**d => 0,4**
B	**a => 0,1**	**2b => 0,5**	**0**
D	**2a => 0,2**	**b => 0,25**	**0,6**

a) Vervollständigen Sie die obige Tabelle/Übergangsmatrix.

Verwenden Sie nun für die kommenden Aufgaben folgende Angaben:

$$U[A,B,D] = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

b) Welche Werte sind gemäß der Datenlage für die kommende Wahl zu erwarten?

$$U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,31 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

c) Wie war die Stimmverteilung zum Zeitpunkt $\overrightarrow{p_0}$?

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \xrightarrow[Inverse]{Lösung\ per} \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,27 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \xrightarrow[LGS]{Lösung\ per} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,27 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

d) Bei welchem Wahlergebnis für die drei Parteien stellt sich ein Gleichgewicht ein?

Ansatz:

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \rightarrow \quad (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{entfällt}]{3.\text{Zeile}} \begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

(2) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingung(en)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y,z) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 8z^2 + 80z - 100$$

ein Maximum besitzt und berechnen Sie auch den Funktionswert.

$$f(x,y,z) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 8z^2 + 80z - 100$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= -4x - 2y + 36 = 0 \\ f_y(x,y,z) &= -2x - 4y + 42 = 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{f_x - 2f_y} `6y - 48 = 0 \rightarrow y = 8 \quad und \quad x = 5$$

$$f_z(x,y,z) = -16z + 80 = 0 \rightarrow z = 5$$

$$\rightarrow S(5 \mid 8 \mid 5 \mid f)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{aligned} & f_{xx} = (-4) < 0 && \text{negativ definit} \\ & \det(H_2) = 16 - 4 = 12 > 0 && \rightarrow Max. \\ & \det(H_3) = -256 + 64 = -192 < 0 && \rightarrow Max(5 \mid 8 \mid 5 \mid 358) \end{aligned}$$

(3) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) = 2 \cdot x^{0,8} \cdot y^{0,2}$

Eine Mengeneinheit für **x kostet 5 GE**, der Preis für eine Mengeneinheit von **y liegt bei 8,00 GE**.

Insgesamt steht ein Budget von **b = 1.000,00** GE zur Verfügung.

a) Bestimmen Sie die optimale Produktion mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um **100** GE erhöht?

$$L(x,y,\lambda) = 2\cdot x^{0,8}\cdot y^{0,2} + \lambda(1.000 - 5x - 8y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) = 1,6\cdot\frac{y^{0,2}}{x^{0,2}} - 5\lambda = 0 \quad\rightarrow\quad \lambda = 0,32\cdot\frac{y^{0,2}}{x^{0,2}}$$

$$L_y(x,y,\lambda) = 0,4\cdot\frac{x^{0,8}}{y^{0,8}} - 8\lambda = 0 \quad\rightarrow\quad \lambda = 0,05\cdot\frac{x^{0,8}}{y^{0,8}}$$

$$\xrightarrow{\text{Gleichsetzen}} \quad 0,32\cdot\frac{y^{0,2}}{x^{0,2}} = 0,05\cdot\frac{x^{0,8}}{y^{0,8}} \quad\rightarrow\quad y = \frac{5}{32}x$$

$$\xrightarrow[\text{in NB}]{\text{Austauschverhältnis}} \quad 1.000 = 5x + 8\cdot\frac{5}{32}x \quad\rightarrow\quad 1.000 = \frac{25}{4}x$$

$$\rightarrow\quad x = 160 \quad \xrightarrow{y=\frac{5}{32}x} \quad y = 25 \quad\rightarrow\quad f(160 \mid 25) = 2\cdot 160^{0,8}\cdot 25^{0,2} = 220,76$$

$$\lambda = 0,32\cdot\frac{y^{0,2}}{x^{0,2}} = 0,32\cdot\left(\frac{5}{32}\right)^{0,2} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{0,4} = 0,2208$$

$$\rightarrow\quad \lambda = 0,2208 \quad \xrightarrow{b=+100} \quad \Delta f = 0,2208\cdot 100 \approx 22,08$$

$$\rightarrow\quad f_{neu} \;=\; 220,76 + 22,08 \;=\; 242,84$$

Sei nun die Produktionsfunktion wie folgt gegeben: $f_k(x,y) = 2\cdot x^k \cdot y^{2k}$

Die Nebenbedingung soll wie zuvor bestehen bleiben.

c) Bestimmen Sie mittels Lagrangeansatz ***nur das Austauschverhältnis*** und zeigen Sie, dass es unabhängig vom Parameter k ist.

$$L(x,y,\lambda) = 2\cdot x^k\cdot y^{2k} + \lambda(1.000 - 5x - 8y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) = 2k\cdot x^{k-1}\cdot y^{2k} - 5\lambda = 0 \quad\rightarrow\quad \lambda = \frac{2}{5}k\cdot x^{k-1}\cdot y^{2k}$$

$$L_y(x,y,\lambda) = 4k\cdot x^k\cdot y^{2k-1} - 8\lambda = 0 \quad\rightarrow\quad \lambda = \frac{1}{2}k\cdot x^k\cdot y^{2k-1}$$

$$\xrightarrow{\text{Gleichsetzen}} \quad \frac{2}{5}k\cdot x^{k-1}\cdot y^{2k} = \frac{1}{2}k\cdot x^k\cdot y^{2k-1} \quad \xrightarrow[\cdot\frac{5}{2}]{:k} \quad \frac{x^k}{x}\cdot y^{2k} = \frac{5}{4}x^k\cdot\frac{y^{2k}}{y}$$

$$\xrightarrow[\cdot x\cdot y]{:x^k\,:y^{2k}} \quad y = \frac{5}{4}\cdot x$$

(4) Kurvenschar zur Differentialrechnung mit einer Variablen

Teil 1: Gegeben sei die Kurvenschar $f_k(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}kx^2 \quad mit\ k>0$.

Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrema.

$$f_k(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}kx^2 \quad mit\ k>0$$

$$f_k'(x)=x^2-kx=0 \quad \to \quad (x-k)x=0 \quad \to \quad x=0 \quad \to \quad x=k$$

$$f_k''(x)=2x-k$$

$$\to \quad f_k''(0)=-k<0 \quad \to \quad HP(0 \mid 0)$$

$$\to \quad f_k''(k)=2k-k=k>0 \quad \to \quad TP\left(k \,\middle|\, -\frac{1}{6}k^3\right)$$

$Ortskurve:$

$$Option\ 1: \quad \to \quad k=x \quad \xrightarrow[einsetzen]{in\ Funktion} \quad y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\cdot x\cdot x^2=-\frac{1}{6}x^3$$

$$Option\ 2: \quad \to \quad k=x \quad \xrightarrow[einsetzen]{in\ y\text{-}Wert} \quad y=-\frac{1}{6}x^3$$

Teil 2: Untersuchen Sie nun die Kurvenschar $g_k(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}kx^2+2kx \quad mit\ k>0$.

Hinsichtlich des Bereichs für k, so dass keine Extrema vorliegen.

$$g_k(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}kx^2+2kx \quad mit\ k>0$$

$$g_k'(x)=x^2-kx+2k=0 \quad \to \quad x_{1/2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-8k}}{2}$$

$\to$ Untersuchung der Diskriminante: Wenn D < 0 => keine Lösung der notwendigen Bedingung

$$\to \quad (k-8)k<0 \quad \to \quad k\in\,]\,0;8\,]$$

(5) Matrizenrechnung, Summen und Rechentechnik: Mathematisches Allerlei

Teil 1: Gegeben sei die Matrix $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\det(A_k)$ b) $(A_k)^2$ c) $(A_k)^{-1}$

$$\det(A_k) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} 0+k+0-0-0-2 = k-2$$

$$[A_k]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Falk-Schema}{=} \begin{array}{c|c} A_k \cdot A_k & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4+k & 2 & 1 \\ 3k & k & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[A_k]^{(-1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \xrightarrow[\text{Unterdeterminanten für die jeweiligen Positionen bilden}]{adjungiert} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2-k & 0 \\ 1 & 2 & -k \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{teansponiert} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2-k & 2 & 2 \\ 0 & -k & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Laplace-Entwcklung \\ \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}]{Vorzeichen-Schema} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ k-2 & 2 & -2 \\ 0 & k & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Determinante]{Kehrwert} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} = \frac{1}{k-2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ k-2 & 2 & -2 \\ 0 & k & -2 \end{pmatrix} = [A_k]^{(-1)}$$

Teil 2: Berechnen Sie den Summenwert des Ausdrucks $\sum_{k=1}^{20}\left(k^2-4k+8\right)$

in entsprechend nachvollziehbarer Form durch Darlegung geeigneter Zwischenschritte.

$$\sum_{k=1}^{20}\left(k^2-4k+8\right) = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} - 4\cdot\frac{20\cdot 21}{2} + (20-1+1)\cdot 8$$

$$\sum_{k=1}^{20}\left(k^2-4k+8\right) = 10\cdot 7\cdot 41 - 2\cdot 20\cdot 21 + 20\cdot 8 = 2.870 - 840 + 160 = 2.190$$

(6) Lineare Optimierung

Teil 1: Konditormeister Kuno Sahneschnitte hat zwei **Arten von Hochzeitstorten** im Sortiment.

Für die Herstellung benötigt er die in der Tabelle zusammengestellten Bestandteile in der entsprechenden Menge. Natürlich muss er sich an Kapazitätsgrenzen halten; diese sind ebenfalls aufgeführt.

Der Gewinn aus dem Verkauf der

Torte (H)erzenswunsch beträgt 30 GE, bei der zweiten **Torte (R)osenstolz** liegt der Gewinn bei 50 GE.

Quelle: Hochzeitstorten Dresden - Cafe und Konditorei Maaß (cafe-maass.de) (Seitenaufruf: 05.01.2024)
Bildergalerien | Hochzeitsportal24 (Seitenaufruf 05.01.2024)

Natürlich möchte Kuno Sahneschnitte den Gesamtgewinn aus der Herstellung und dem Verkauf beider Sorten von Hochzeitstorten maximieren. Der Absatz der Hochzeitstorten kann als sicher angenommen werden. Es gelten zudem die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen.

	Torte (H)erzenswunsch	Torte (R)osenstolz	Kapazitätsgrenze
Mehl	**3 kg / Torte**	**6 kg / Torte**	**84 kg**
Zucker	**2 kg / Torte**	**2 kg / Torte**	**36 kg**
Butter	**4 kg / Torte**	**2 kg / Torte**	**64 kg**
Stückgewinn	**30 GE / Torte**	**50 GE / Torte**	

a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch und geben Sie die optimale Kombination an.

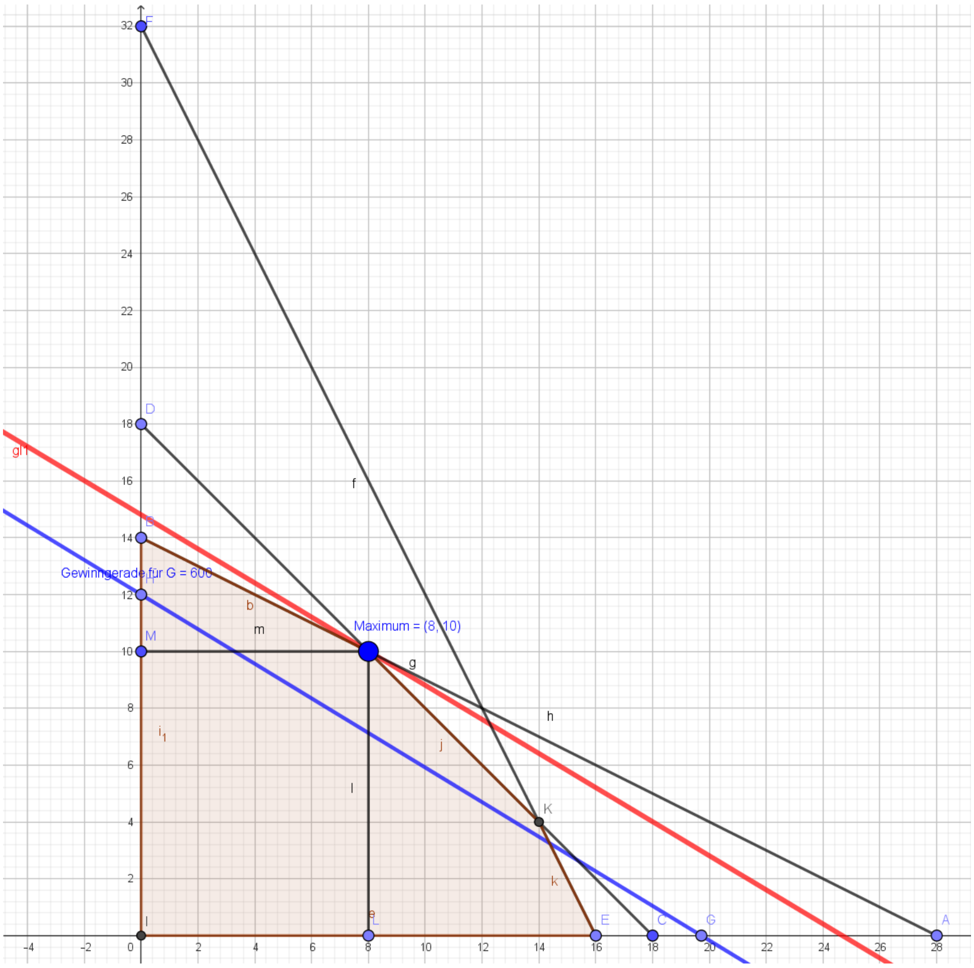
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} \quad mit\ Gewinn\ G = 740$$

b) Aufgrund von Lieferproblemen beim Mehl, **reduziert sich der Stückgewinn für die Torte Rosenstolz auf 20 GE / Torte.**

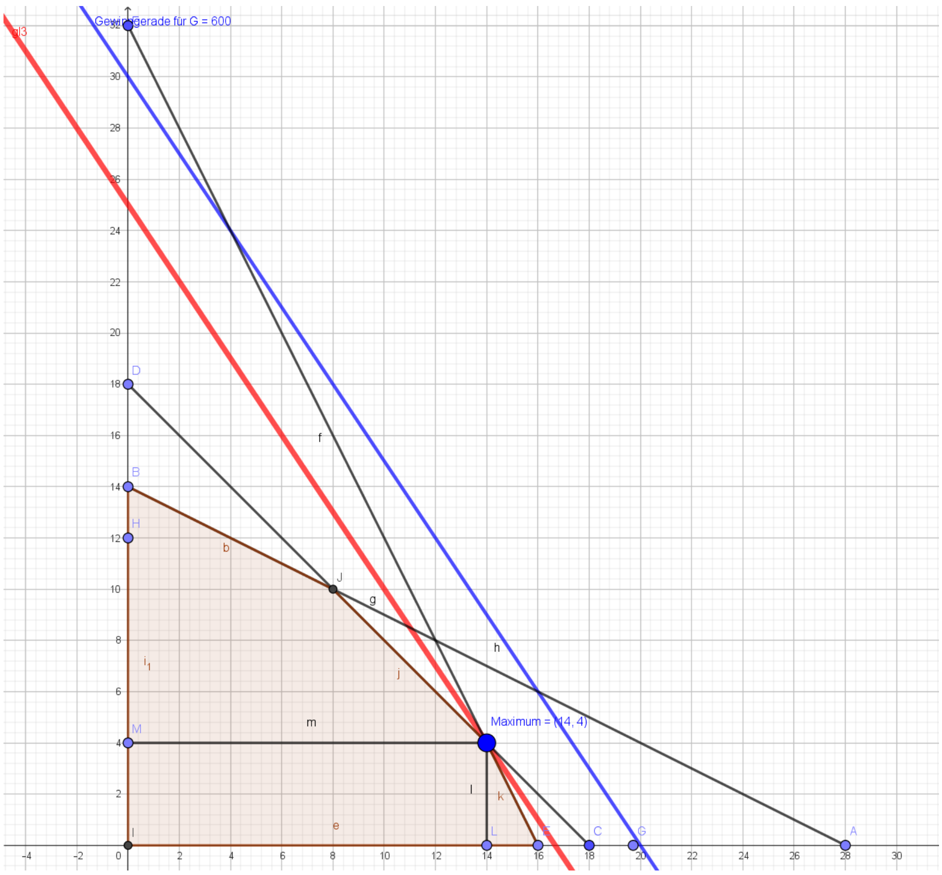
Welches ist nun die optimale Herstellungskombination, um den Gesamtgewinn zu optimieren?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \quad mit\ Gewinn\ G = 500$$

Graphische Lösung zu a)



Graphische Lösung zu b)



Teil 2: Nach einigen Schritten mit dem Simplexalgorithmus erhält man folgendes Tableau:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	14	
II	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	8	
III	3	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	36	
ZF	5	0	$-\frac{25}{3}$	0	0	G-700	
I							
II							
III							
ZF							

c) Woran erkennt man, dass noch weiter gerechnet werden muss?

⇨ **In der ZF-Zeile sind noch positive Werte enthalten.**

d) Wie würde die aktuelle Lösung gemäß dem Tableau lauten und welcher Gewinn würde erzielt?

$$\begin{pmatrix} y \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 36 \end{pmatrix} \quad mit\ Gewinn\ G = 700$$

e) Erstellen Sie nun ausgehend vom gegebenen Tableau das Endtableau und geben Sie die vollständige Lösung an.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} \quad mit\ Gewinn\ G = 740$$

Gesamter Simplexalgorithmus als Lösung:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	3	6	1	0	0	84	(i) / 6
II	2	2	0	1	0	36	
III	4	2	0	0	1	64	
ZF	30	50	0	0	0	G	
I	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	14	
II	2	2	0	1	0	36	(ii) – 2(i)
III	4	2	0	0	1	64	(iii) – 2(i)
ZF	30	50	0	0	0	G	ZF – 50(i)
I	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	14	(i) – 0,5(ii)
II	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	8	
III	3	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	36	(iii) – 3(ii)
ZF	5	0	$-\frac{25}{3}$	0	0	G-700	ZF – 5(ii)
I	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	10	
II	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	8	
III	0	0	$\frac{2}{3}$	- 3	1	12	
ZF	0	0	$-\frac{20}{3}$	- 5	0	G-740	