Klausur: Mathematik
am Freitag, den 03. Juli 2009

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1.) Berechnen mathematischer Ausdrücke

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Summenausdrucks: $$\sum_{t=21}^{1000}\left(\frac{1}{2}t+2\right)$$

Lösung:

$$\sum_{t=21}^{1000}\left(\frac{1}{2}t+2\right) \overset{Index}{=} \sum_{t=1}^{980}\left[\frac{1}{2}(t+20)+2\right] = \sum_{t=1}^{980}\left(\frac{1}{2}t+12\right) \overset{Zerlegung}{=} \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{980}t+\sum_{t=1}^{980}12$$

$$\sum_{t=21}^{1000}\left(\frac{1}{2}t+2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{980\cdot 981}{2}+12\cdot 980 = 240.345+11.760 = 252.105$$

b) Bilden Sie die Entwicklung nach dem Binomischen Lehrsatz und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich:

$$\left(2x-\frac{1}{2}k\right)^6$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\left(2x-\frac{1}{2}k\right)^6 = {} & \binom{6}{0}(2x)^6\cdot\left(-\frac{1}{2}k\right)^0+\binom{6}{1}(2x)^5\cdot\left(-\frac{1}{2}k\right)^1+\binom{6}{2}(2x)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}k\right)^2 \\ & +\binom{6}{3}(2x)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}k\right)^3+\binom{6}{4}(2x)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}k\right)^4+\binom{6}{5}(2x)^1\cdot\left(-\frac{1}{2}k\right)^5 \\ & +\binom{6}{6}(2x)^0\cdot\left(-\frac{1}{2}k\right)^6\end{aligned}$$

$$\left(2x-\frac{1}{2}k\right)^6 = 64x^6-96kx^5+60k^2x^4-20k^3x^3+\frac{15}{4}k^4x^2-\frac{3}{8}k^5x+\frac{1}{64}k^6$$

2.) Integralrechnung

a) Ermitteln Sie allgemein das Marktgleichgewicht in Abhängigkeit von k.

$$p_A(x) = \frac{1}{2}x^2 + k \qquad \text{und} \qquad p_N(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 12$$

Lösung:

$$p_A(x) \quad = \quad p_N(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + k \quad = \quad -\frac{1}{8}x^2 + 12$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{8}x^2 = 12 - k \quad \xrightarrow{\cdot\frac{8}{5}} \quad x^2 = \frac{8(12-k)}{5} \quad \xrightarrow{\sqrt{\ }} \quad |x| = \sqrt{\frac{8(12-k)}{5}}$$

$$p_A\left(\sqrt{\frac{8(12-k)}{5}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8(12-k)}{5} + k = \frac{48+k}{5} \quad \Rightarrow \quad M\left(\sqrt{\frac{8(12-k)}{5}} \;\middle|\; \frac{48+k}{5}\right)$$

b) Ermitteln Sie die **Konsumentenrente** bei x = 4.

Lösung:

$$K_R \quad = \quad \int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 12\right)dx - 4\cdot p_N(4) \quad = \quad \left[-\frac{1}{24}x^3 + 12x\right]_0^4 - 4\cdot 10$$

$$K_R \quad = \quad -\frac{8}{3} + 48 - 40 \quad = \quad 5\frac{1}{3} \quad = \quad \frac{16}{3}$$

3.) Kurvenuntersuchung

Gegeben sei die Funktion g(x) mit der Funktionsvorschrift

$$g_k(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + kx^2 \quad mit \quad k \in \Re$$

a) Wie lauten für **k = 2** die Extremwerte?

Lösung:

$$g_2(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad g_2'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x = x\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3 \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 2 \quad und \quad x_3 = 4$$

$$g_2''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$$

$$\Rightarrow \quad g_2''(0) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad g_2''(2) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(2 \mid 2)$$

$$\Rightarrow \quad g_2''(4) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(4 \mid 0)$$

Nun sei k wieder frei wählbar und damit $k \in \Re$

b) Für welchen Wert von k besitzt die Funktion genau einen Wendepunkt?

Lösung:

$$\text{genau ein Wendepunkt:} \quad g_k''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2k = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} \cdot \left(6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2k}\right) = 2 \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{36 - 12k}$$

$$\xrightarrow{\text{Diskriminante = 0}} \quad 36 - 12k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$g_3'''(x) = 3x - 6 \quad \Rightarrow \quad g_3'''(2) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Ersatzkriterium}} \text{Vorzeichenwechsel bei f''(x):} \quad kein\,WP$$

$$\text{kein Wendepunkt:} \quad \Rightarrow \quad 36 - 12k < 0 \quad \xrightarrow{\text{Gesamtergebnis}} \quad k \geq 3$$

4.) Newton-Iteration

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2$

Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion mittels der Newton-Iteration auf drei Stellen genau (2 Näherungen).

Startwert: **x = 6**

Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2 \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	6	2	-6	6.3333
1	6.3333	-0.228395	-7.38888	6.3024
2	6.3024	-0.002065	-7.255420	6.3021

5.) Totales Differential

Gegeben sei ein Funktion: $f(x,y) = \sqrt{64 - x^2 - y}$

Vom Ausgangsniveau $\vec{x}_{alt} = (5 \quad 3)$ tritt eine Veränderung auf $\vec{x}_{neu} = (5,5 \quad 3,2)$.

Um welchen Betrag wird sich der Funktionswert näherungsweise verändern, wenn Sie hierfür das totale Differential heranziehen?

Lösung:

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{64 - x^2 - y}} \quad und \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{64 - x^2 - y}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(5;3)}{\partial x} = \frac{-5}{\sqrt{64 - 25 - 3}} = -\frac{5}{6} \quad und \quad \frac{\partial f(5;3)}{\partial x} = -\frac{1}{12}$$

$$Ansatz: \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot dx$$

$$df = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{26}{60} = -\frac{13}{30} = -0,4333$$

6.) Optimum ohne Nebenbedingungen

Von einer 2-Produkt-Unternehmung, die als monopolistischer Anbieter am Markt agiert, sind folgende Größen bekannt:

Gesamtkostenfunktion $K(x,y) \;=\; 0{,}5x^2 + xy + y^2 + 500.000$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) \;=\; 1.280 - 4x + y$

Preis für Gut 2: $p_2(x,y) \;=\; 2.360 + 2x - 3y$

Bestimmen Sie das Gewinnmaximum und zeigen Sie auch, dass es sich um ein Maximum handelt.

Geben Sie auch die Höhe des maximalen Gewinns an.

<u>Lösung:</u>

$$\textit{Gewinnfunktion}:$$

$$g(x,y) = p_1(x,y)\cdot x + p_2(x,y)\cdot y - K(x,y)$$

$$g(x,y) = (1.280 - 4x + y)\cdot x + (2.360 + 2x - 3y)\cdot y - \left(0{,}5x^2 + xy + y^2 + 500.000\right)$$

$$g(x,y) = 1.280x - 4x^2 + xy + 2.360y + 2xy - 3y^2 - 0{,}5x^2 - xy - y^2 - 500.000$$

$$g(x,y) = -\frac{9}{2}x^2 + 1.280x - 4y^2 + 2.360y + 2xy - 500.000$$

$$I.)\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -9x + 1.280 + 2y \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad y = -640 + \frac{9}{2}x$$

$$II.)\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -8y + 2.360 + 2x \overset{!}{=} 0 \quad\xrightarrow{I\ in\ II}\quad -8\cdot\left(-640 + \frac{9}{2}x\right) + 2.360 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow\quad 5.120 - 36x + 2.360 + 2x = 0 \quad\Rightarrow\quad -34x = -7.480 \quad\Rightarrow\quad x = 220 \quad\Rightarrow\quad y = 350$$

Es resultiert eine stationäre Stelle: $S(220 \mid 350 \mid 53.800)$

$$\textit{Hesse-Matrix}:\quad H\left(g_S(220 \mid 350)\right) = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \det(H) = 68 > 0 \quad\wedge\quad g_{xx} = (-9) < 0 \quad\Rightarrow\quad Max(220 \mid 350 \mid 53.800)$$

7.) Optimum mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion:

$$f(x,y) = 2x^{0{,}7} \cdot y^{0{,}3}$$

Die Mengeneinheit für x kostet 3,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 4,00 €.

Insgesamt stehen uns 6.000,00 € zur Verfügung.

Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

<u>Lösung:</u>

$$L(x,y,\lambda) = 2x^{0{,}7} \cdot y^{0{,}3} + \lambda(6.000 - 3x - 4y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 1{,}4 \cdot \frac{y^{0{,}3}}{x^{0{,}3}} - 3\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{15} \cdot \frac{y^{0{,}3}}{x^{0{,}3}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0{,}6 \cdot \frac{x^{0{,}7}}{y^{0{,}7}} - 4\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{20} \cdot \frac{x^{0{,}7}}{y^{0{,}7}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{7}{15} \cdot \frac{y^{0{,}3}}{x^{0{,}3}} = \frac{3}{20} \cdot \frac{x^{0{,}7}}{y^{0{,}7}} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 15}{20 \cdot 7} x = \frac{9}{28} x$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$6.000 = 3x + 4y \xrightarrow{y = \frac{9}{28}x} 6.000 = 3x + 4 \cdot \frac{9}{28} x$$

$$\Rightarrow 6.000 = \frac{30}{7} x \Rightarrow x = 1.400 \Rightarrow y = 450$$

$$\Rightarrow f(1.400 \mid 450) = 2 \cdot 1.400^{0{,}7} \cdot 450^{0{,}3} \approx 1.992$$

8.) Ökonomische Anwendungen zu Matrizen

Ein Betrieb stellt aus 3 Rohstoffen 2 Zwischenprodukte und daraus wiederum 3 Endprodukte her.

Der Materialeinsatz ist folgenden Matrizen zu entnehmen:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & t \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2t & 3 \end{pmatrix}$$

a) Wie lautet die Matrix für den Gesamtverbrauch der Rohstoffe?

Lösung:

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} \quad = \quad M_{RE} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & t \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2t & 3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 7 & 12+4t & 12 \\ 4+2t & 16+2t^2 & 8+3t \\ 12 & 8+10t & 19 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie nun unabhängig von Ihrem Ergebnis in a) für die weitere Berechnung die Matrix

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 12 \\ 6 & 18 & 11 \\ 12 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe sind notwendig, damit 5 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 10 ME von E_3 hergestellt werden können?

Lösung:

$$M_{RE} \cdot \vec{e} \quad = \quad \begin{pmatrix} 7 & 16 & 12 \\ 6 & 18 & 11 \\ 12 & 18 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 315 \\ 320 \\ 430 \end{pmatrix}$$

c) Wie viele Endprodukte E_1, E_2 und E_3 können bei einem einen Lagerbestand an Rohstoffen von $R_1 = 270$, $R_2 = 260$ und von $R_3 = 400$ hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte und E_3 als freie Variable gewählt wird?
(=> allgemeine Lösung in Abhängigkeit von E_3!)

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \begin{pmatrix} 7 & 16 & 12 \\ 6 & 18 & 11 \\ 12 & 18 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 260 \\ 400 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauß-Verfahren}]{\text{Lösung mittels}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$L_{\text{allgemein}} = \left\{ x_3 \in \Re \mid \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{70}{3} - \frac{4}{3}x_3 \quad \frac{20}{3} - \frac{1}{6}x_3 \quad x_3 \right) \right\}$$

Rechenweg in Einzelschritten:

$$\begin{aligned} 7\,x_1 + 16\,x_2 + 12\,x_3 &= 270 \quad (1)\\ 6\,x_1 + 18\,x_2 + 11\,x_3 &= 260 \quad (2)\\ 12\,x_1 + 18\,x_2 + 19\,x_3 &= 400 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 16/7\,x_2 + 12/7\,x_3 &= 270/7 \quad (1)\\ 6\,x_1 + 18\,x_2 + 11\,x_3 &= 260 \quad (2)\\ 12\,x_1 + 18\,x_2 + 19\,x_3 &= 400 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 16/7\,x_2 + 12/7\,x_3 &= 270/7 \quad (1)\\ 30/7\,x_2 + 5/7\,x_3 &= 200/7 \quad (2)\\ 12\,x_1 + 18\,x_2 + 19\,x_3 &= 400 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 16/7\,x_2 + 12/7\,x_3 &= 270/7 \quad (1)\\ 30/7\,x_2 + 5/7\,x_3 &= 200/7 \quad (2)\\ -66/7\,x_2 - 11/7\,x_3 &= -440/7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 16/7\,x_2 + 12/7\,x_3 &= 270/7 \quad (1)\\ x_2 + 1/6\,x_3 &= 20/3 \quad (2)\\ -66/7\,x_2 - 11/7\,x_3 &= -440/7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 4/3\,x_3 &= 70/3 \quad (1)\\ x_2 + 1/6\,x_3 &= 20/3 \quad (2)\\ -66/7\,x_2 - 11/7\,x_3 &= -440/7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 4/3\,x_3 &= 70/3 \quad (1)\\ x_2 + 1/6\,x_3 &= 20/3 \quad (2)\\ 0 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar

$x_1 = 70/3 - 4/3\,x_3$

$x_2 = 20/3 - 1/6\,x_3$

x_3 beliebig wählbar

d) Die drei Endprodukte werden in einem Mengenverhältnis von 2:1:7 hergestellt; vom Rohstoff R_3 sind 700 ME auf Lager.

Wie viele der jeweiligen Endprodukte können hergestellt werden und welche Rohstoffmengen von R_1 und R_2 benötigt man, wenn das Lager am Ende leer sein soll?

Lösung:

$$Ansatz: \begin{pmatrix} 7 & 16 & 12 \\ 6 & 18 & 11 \\ 12 & 18 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 7x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 700 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 114x \\ 107x \\ 175x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 700 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 175x = 700 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow a = 456 \Rightarrow b = 428$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \begin{pmatrix} 2x & x & 7x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 28 \end{pmatrix}$$

9.) *Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus*

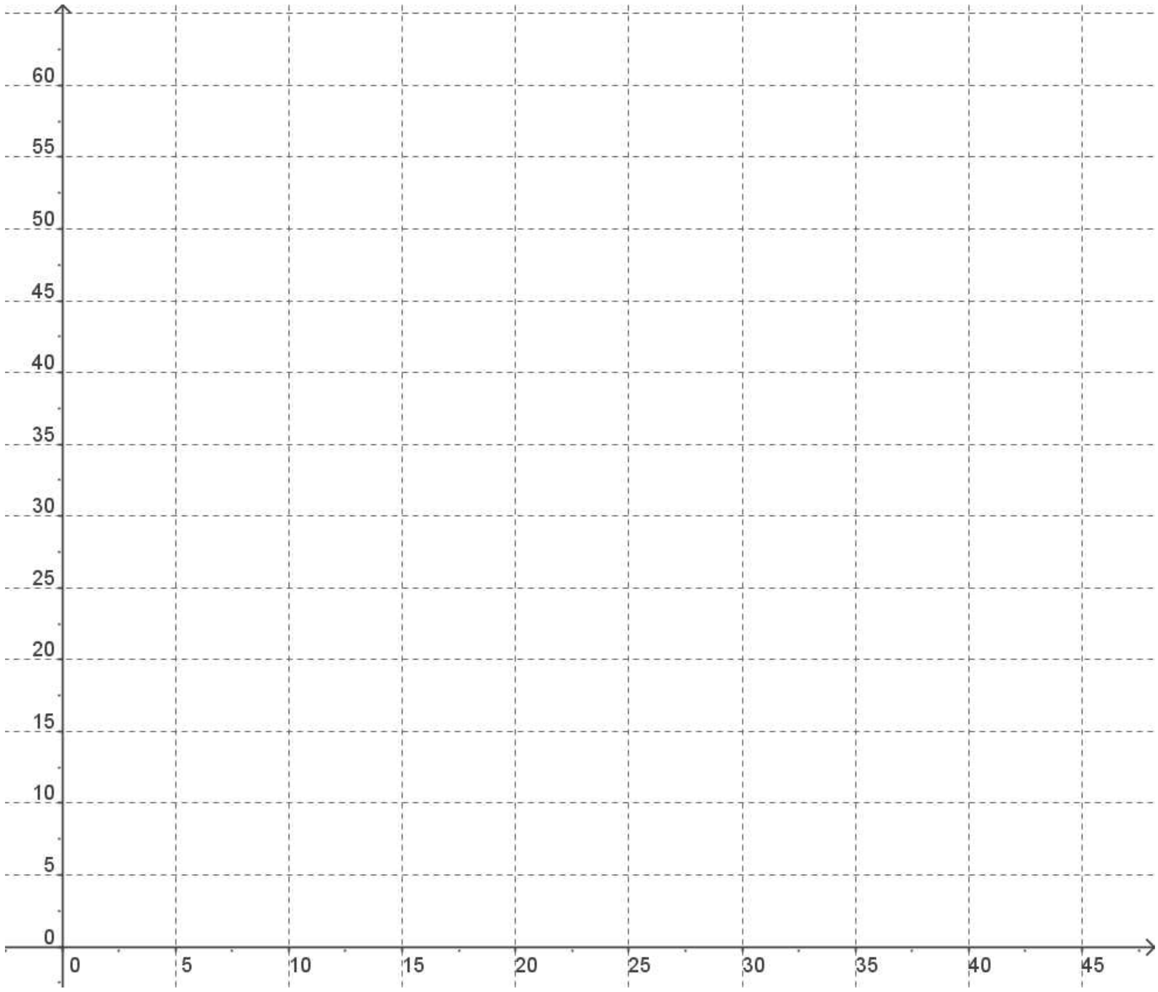
Eine Unternehmung stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her.
Die Fertigung erfolgt auf den Maschinen M_1, M_2 und M_3 und erfordert unterschiedliche Belegungszeiten.
Die Bearbeitungsdauer (bezogen auf Minuten) und die Kapazitäten (in Minuten) der Maschinen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

	Bearbeitungszeit für P_1	Bearbeitungszeit für P_2	Kapazität
M_1	1	2	40
M_2	1,5	1	30
M_3	3	1	54

Der Deckungsbeitrag pro ME beträgt 3 GE von P_1 und 4 GE von P_2.
Wie viele ME sind von P_1 und P_2 herzustellen, damit der gesamte Deckungsbeitrag möglichst groß ist?

Wie hoch ist der maximale Deckungsbeitrag?

a) Bestimmen Sie graphisch das Maximum.



b) Bestimmen Sie das Maximum mit Hilfe des Simplexalgorithmus und geben Sie den Deckungsbeitrag an.

Lösung:

x = ME von Produkt P_1 **y = ME von Produkt P_2**

Bedingungen:	Nichtnegativitätsbedingungen	Zielfunktion:
$x + 2y \leq 40$ $1{,}5x + y \leq 30$ $3x + y \leq 54$	$x \geq 0$ *und* $y \geq 0$	$3x + 4y = Z \rightarrow \max.$

Simplexalgorithmus

$$
\begin{array}{l|ccccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\
I.) & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40 \\
II.) & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
III.) & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 54 \\
\hline
DB: & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & Z
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot I.)} \\
\\
\\
\\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\
I.) & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 20 \\
II.) & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
III.) & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 54 \\
\hline
DB: & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & Z
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
\\
\xrightarrow{II.)-I.)} \\
\xrightarrow{III.)-I.)} \\
\xrightarrow{DB-4\cdot I.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\
I.) & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 20 \\
II.) & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 10 \\
III.) & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 34 \\
\hline
DB: & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & Z-80
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
\xrightarrow{I.)-\frac{1}{2}\cdot II.)} \\
\\
\xrightarrow{III.)-\frac{5}{2}\cdot II.)} \\
\xrightarrow{DB-II.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\
I.) & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 15 \\
II.) & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 10 \\
III.) & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & 1 & 9 \\
\hline
DB: & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & Z-90
\end{array}
$$

Lösung

$$L = \{(x \quad y \quad u_3)\} = \{(10 \quad 15 \quad 9)\}$$

Somit beträgt der Deckungsbeitrag 90.000,00 €.