Klausur: Mathematik
am Mittwoch, den 4. Juli 2007

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion $f_k(x)$ mit der Vorschrift

$$f_k(x) \quad = \quad kx^3 - 4x^2 \quad mit \quad k \in \Re \setminus \{0\}$$

nach folgenden Kriterien:

a) Nullstellen
b) Extrema
c) Wendepunkte
d) Ortskurve der Wendepunkte
e) Für welchen Wert von k lautet die Tangente an der Stelle x = 1:

$$t(x) \quad = \quad -2x$$

<u>Lösung:</u>

a) Nullstellen: $x^2(kx-4) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0\,(doppelt) \quad \vee \quad x_2 = \dfrac{4}{k}$

b) Extrema:

$$f_k'(x) \quad = \quad 3kx^2 - 8x \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = \frac{8}{3k}$$

$$f_k''(x) \quad = \quad 6kx - 8$$

$$\Rightarrow \quad f_k''(0) \quad = \quad -8 \quad < \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad f_k''\left(\frac{8}{3k}\right) \quad = \quad 6k \cdot \left(\frac{8}{3k}\right) - 8 \quad = \quad 8 \quad > \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{8}{3k} \,\middle|\, -\frac{256}{27k^2}\right)$$

c) Wendepunkte:

$$f_k''(x) \quad = \quad 6kx - 8 \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3k}$$

$$f_k'''(x) \quad = \quad 6k \quad \neq \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{4}{3k} \,\middle|\, -\frac{128}{27k^2}\right)$$

d) Ortskurve der Wendepunkte:

$$x = \frac{4}{3k} \Rightarrow k = \frac{4}{3x}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{128}{27k^2} \xrightarrow{eingesetzt} y = -\frac{128}{27\cdot\left(\frac{4}{3x}\right)^2} = -\frac{128\cdot 9x^2}{27\cdot 16} = -\frac{8}{3}x^2$$

e) Tangente:

$$f_k(1) = k-4 \wedge f_k'(1) = 3k-8$$

$$Tangentengleichung: \ t(x) = mx+b$$

$$k-4 = (3k-8)\cdot 1+b \Rightarrow b = -2k+4$$

$$\Rightarrow t(x) = (3k-8)x+(-2k+4) \overset{!}{=} -2x$$

$$\Rightarrow -2k+4 = 0 \Rightarrow k=2$$

$$\xrightarrow{\text{Probe}} 3k-8 = -2 \Rightarrow k=2$$

2.) **Optimum ohne Nebenbedingungen und totales Differential**

a) Bestimmen Sie die stationäre Stelle der Funktion und prüfen Sie, ob ein Extremum vorliegt.

$$f(x,y) = x^2+2x-4xy+8y^2$$

<u>Lösung:</u>

$$f(x,y) = x^2+2x-4xy+8y^2$$

$$I.)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2-4y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2y-1$$

$$II.)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x+16y \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{x=2y-1} -4\cdot(2y-1)+16y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 8y+4=0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x=2y-1} x = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1 = (-2)$$

Es resultiert eine stationäre Stelle: $S_1\left(-2 \;\middle|\; -\frac{1}{2} \;\middle|\; -2\right)$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f)=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det(H)>0 \;\wedge\; f_{xx}>0 \;\Rightarrow\; Min\left(-2 \;\middle|\; -\frac{1}{2} \;\middle|\; -2\right)$$

b) Bilden Sie das totale Differential $d\,f$ der Funktion, wenn sich eine Änderung von P_1 (x/y) = (2/-1) zu P_2 (x/y) = (2,1/-0,9) ergibt.

Lösung:

$$f(x,y) = x^2+2x-4xy+8y^2$$

$$d\ f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot dy$$

$$d\ f = (2x+2-4y)\cdot(2{,}1-2)+(-4x+16y)\cdot\left[(-0{,}9)-(-1)\right]$$

$$d\ f(2 \mid -1) = 10\cdot 0{,}1+(-24)\cdot 0{,}1 = -1{,}4$$

c) Wie groß ist die tatsächliche Veränderung $\Delta\ f$?

Lösung:

$$\Delta\ f = f(2{,}1 \mid -0{,}9) - f(2 \mid -1)$$

$$\Delta\ f = 22{,}65 - 24 = -1{,}35$$

3.) **Integralrechnung**

a) Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage:

$p_A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ und $p_N(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 15$

Lösung:

$$aus \quad p_A(x) = p_N(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + 5 \quad = \quad -\frac{1}{8}x^2 + 15$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{8}x^2 - 5} \quad \frac{5}{8}x^2 = 10 \quad \xrightarrow{\cdot\frac{8}{5}} \quad x^2 = 16 \quad \xrightarrow{\sqrt{}} \quad |x| = 4$$

$$p_A(4) = \frac{1}{2}\cdot 16 + 5 = 13 \quad \Rightarrow \quad M(4 \mid 13)$$

b) Ermitteln Sie die **Produzentenrente** bei x = 4.

Lösung:

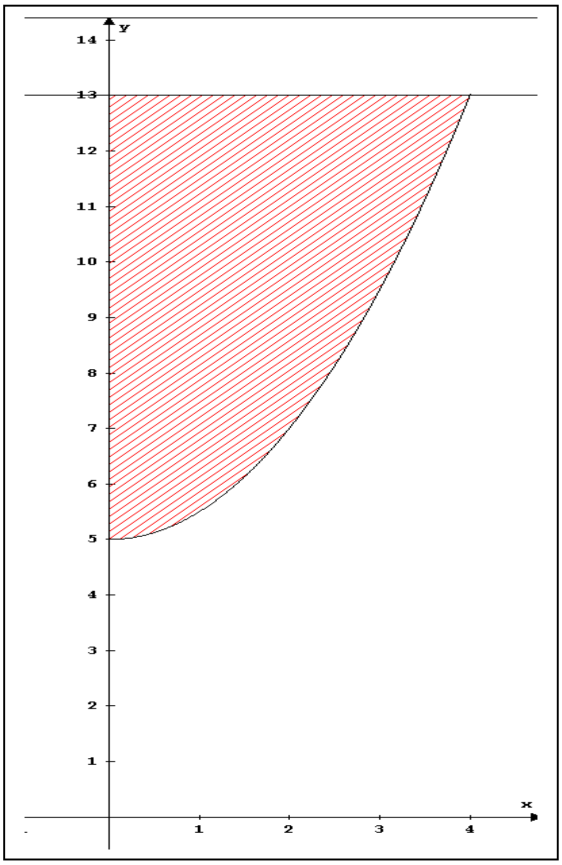
$$p_A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$$

Produzentenrente:

$$P_R \quad = \quad 4\cdot 13 - \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right) dx$$

$$P_R \quad = \quad 52 - \left[\frac{1}{6}x^3 + 5x\right]_0^4$$

$$P_R \quad = \quad \frac{64}{3} \quad \approx \quad 21{,}33$$



4.) **Extrema mit Nebenbedingungen**

Gesucht ist das Produktionsoptimum, bei einem einem Kostenbudget von höchstens 2.000 Geldeinheiten:

Produktionsfunktion: $f(x,y) \quad = \quad 10 \cdot x^{0,7} \cdot y^{0,3}$

Preis Produktionsfaktor x: p_1 = 2 Geldeinheiten

Preis Produktionsfaktor y: p_2 = 4 Geldeinheiten

<u>Lösung:</u>

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 10 \cdot x^{0,7} \cdot y^{0,3} + \lambda(2.000 - 2x - 4y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 7 \cdot \frac{y^{0,3}}{x^{0,3}} - 2\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{7y^{0,3}}{2x^{0,3}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 3 \cdot \frac{x^{0,7}}{y^{0,7}} - 4\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{3x^{0,7}}{4y^{0,7}}$$

$$\mathit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{7y^{0,3}}{2x^{0,3}} \quad = \quad \frac{3x^{0,7}}{4y^{0,7}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{3}{14}x$$

$$\mathit{eingesetzt\ in\ NB}:$$

$$2.000 \quad = \quad 2x + 4y \quad \xrightarrow{y = \frac{3}{14}x} \quad 2.000 \quad = \quad 2x + 4 \cdot \frac{3}{14}x$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad 700 \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad 150$$

$$\Rightarrow \quad f(700 \mid 150) \quad = \quad 10 \cdot 700^{0,7} \cdot 150^{0,3} \quad = \quad 4.409,57$$

5.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben sind folgende Matrizen einer Produktionsserie:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix M_{RE} in Abhängigkeit von **t**.

Lösung:

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} = M_{RE} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & t \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 2t+5 \\ 18 & 4t+5 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe benötigen wir, zur Herstellung des folgenden Bedarfes an ***ZWISCHENPRODUKTEN***: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$?

Lösung:

$$M_{RZ} \cdot \vec{z} = \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 90 \end{pmatrix}$$

c) Von e_2 sollen doppelt so viele Endprodukte wie von e_1 hergestellt werden, wobei ein Rohstoffvorrat von $\vec{r} = \begin{pmatrix} 370 & 440 \end{pmatrix}$ vorliegt.

Wie viele Endprodukte können produziert werden, wenn danach das Rohstofflager vollkommen leer ist und welchen Wert muss hierzu t annehmen?

Lösung:

$$Ansatz: \quad M_{RE} \cdot \vec{e} = \vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 2t+5 \\ 18 & 4t+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 370 \\ 440 \end{pmatrix} \xrightarrow{e_2 = 2e_1} \begin{pmatrix} 19 & 2t+5 \\ 18 & 4t+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ 2e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 370 \\ 440 \end{pmatrix}$$

$$LGS:$$

$$I.) \quad 19e_1 + 2e_1 \cdot (2t+5) = 370 \Rightarrow e_1(4t+29) = 370 \Rightarrow e_1 = \frac{370}{4t+29}$$

$$II.) \quad 18e_1 + 2e_1 \cdot (4t+5) = 440 \Rightarrow e_1(8t+28) = 440 \Rightarrow e_1 = \frac{440}{8t+28}$$

$$Gleichsetzen:$$

$$\frac{370}{4t+29} = \frac{440}{8t+28} \xrightarrow{\text{mit HN multiplizieren}} 370 \cdot (8t+28) = 440 \cdot (4t+29)$$

$$\Rightarrow 2.960t + 10.360 = 1.760t + 12.760 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow e_1 = 10 \Rightarrow e_2 = 20$$

6.) **Investitionsrechnung**

Die haben zwei Projekte zur Auswahl und sollen eine Investitions-entscheidung treffen.

Beide Projekte verursachen eine Anfangsausgabe von je 8.000,00 €.
Die Rückflüsse für Projekt I in den folgenden vier Jahren würden bei 2.000 € (Jahr 1), 3.000 € (Jahr 2), 4.000 € (Jahr 3) und 1.000 € (Jahr 4) liegen.

Projekt II würde in den ersten beiden Jahren keine Rückflüsse erbringen, aber mit 6.000 € (Jahr 3) und 5.000 € (Jahr 4) absolut gesehen einen vermeintlich höheren Ertrag liefern.

a) Beurteilen Sie die Situation auf Basis eines Kalkulationszinssatzes von 6 % mit Hilfe der Kapitalwertmethode und treffen Sie eine Investitionsentscheidung.

b) Wie hoch müsste der Rückfluss des 4. Jahres für Projekt II sein, damit beide Projekte den identischen Kapitalwert besitzen?

Lösung:

	A	B	C	D	E	F
1	Investitionen					
2						
3	t0	t1	t2	t3	t4	Zinssatz
4	-8.000,00	2.000,00	3.000,00	4.000,00	1.000,00	6,00
5	1886,79					
6	2669,99					
7	3358,48		**Teilaufgabe a)**			
8	792,09					
9	Kapitalwert:	707,35				
10						
11						
12	-8.000,00	0,00	0,00	6.000,00	5.000,00	6,00
13	0,00					
14	0,00					
15	5.037,72		**Teilaufgabe a)**			
16	3.960,47					
17	Kapitalwert:	998,18				
18						
19						
20	-8.000,00	0,00	0,00	6.000,00	4.632,83	6,00
21	0,00					
22	0,00					
23	5.037,72		**Teilaufgabe b)**			
24	3.669,63					
25	Kapitalwert:	707,35				

c) Wie hoch wäre der interne Zinsfuß/-satz für Projekt I?

(Anmerkung: eine Näherung per Newton-Iteration genügt!)

Lösung:

Projekt I:

$$C_0(q) = -8.000 + \frac{2.000}{q} + \frac{3.000}{q^2} + \frac{4.000}{q^3} + \frac{1.000}{q^4} \stackrel{!}{=} 0$$

$$-8q^4 + 2q^3 + 3q^2 + 4q + 1 \stackrel{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{Lösung per Newton-Iteration}}$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1.1	-0.0208	-24.732	1.099158
1	1.099158	-0.000034270	-24.65052554	1.09915759

Der interne Zinsfuß liegt bei etwa p_{intern} = 9,9158 [%].

(Ein Iterationsdurchgang bzw. eine Näherung genügt!)

7.) **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Gesucht ist das Maximum der Funktion G(x,y) = 4x + 3y unter

Berücksichtigung folgender Nebenbedingungen:

I.) $2x + y \leq 22$

II.) $x + 3y \leq 30$ und

III.) $2x + 2y \leq 25$

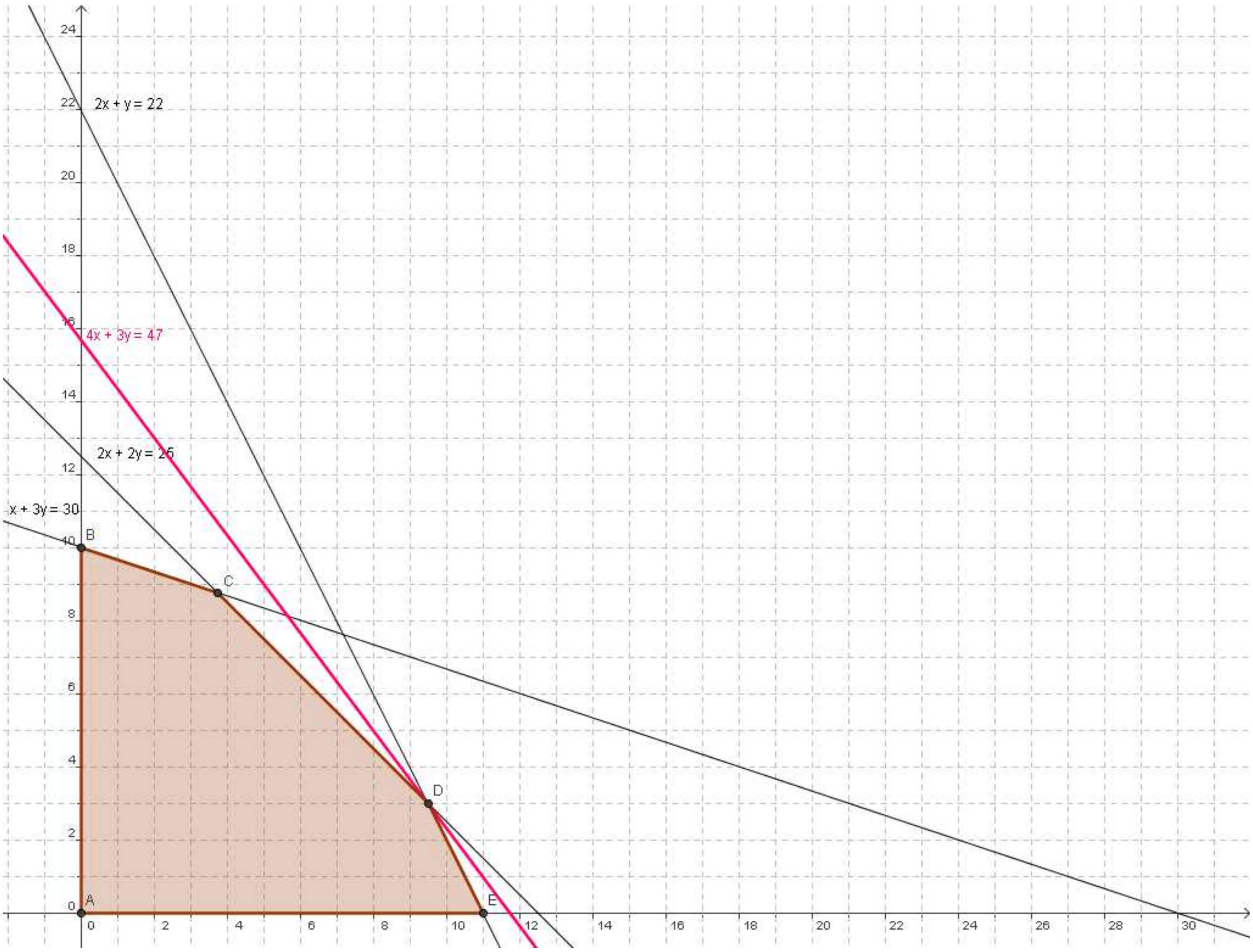
a) Stellen Sie den Simplex-Raum graphisch dar.

b) Ermitteln Sie die Zielfunktion für G = 30.

c) Bestimmen Sie graphisch das Maximum von G.

d) Bestimmen Sie das Maximum mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösung:



Bedingungen: **x = Anzahl der Produkte P_1 und y = Anzahl der Produkte P_2**

$$2x + y \leq 22$$
$$x + 3y \leq 30$$
$$2x + 2y \leq 25$$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x \geq 0 \quad und \quad y \geq 0$$

Zielfunktion: $4x + 3y = Z \rightarrow \max.$

$$\begin{array}{r|ccccc|c} & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\ I.) & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 22 \\ II.) & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ III.) & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ \hline G: & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & Z \end{array} \quad \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{r|ccccc|cl} I.) & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 11 & \\ II.) & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 30 & \xrightarrow{II.)-\ I.)} \\ III.) & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 25 & \xrightarrow{III.)-\ 2\cdot I.)} \\ \hline G: & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & Z & \xrightarrow{G-4\cdot I.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccccc|cl} I.) & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 11 & \xrightarrow{I.)-\frac{1}{2}\cdot III.)} \\ II.) & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 19 & \xrightarrow{II.)-\frac{5}{2}\cdot III.)} \\ III.) & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & \\ \hline G: & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & Z-44 & \xrightarrow{G-III.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccccc|c} I.) & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 9,5 \\ II.) & 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{5}{2} & 11,5 \\ III.) & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline G: & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & Z-47 \end{array}$$

Lösung: $x = 9,5 \quad y = 3$ **und** $u_2 = 11,5 \quad => \quad G = 47$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 3 \\ 11,5 \end{pmatrix} \quad mit \quad G_{\max} = 47$$