Klausur: Mathematik
am Mittwoch, den 9. Juni 2008

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1.) **Grundlagen**

Schreiben Sie die Ausdrücke in ausgerechneter Form

a) $\sum_{k=2}^{5} 2^{k!}$ b) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}(-2)^{i+k}$ c) $(a+2)^8$

Lösung:

$$\sum_{k=2}^{5} 2^{k!} = 2^{2!}+2^{3!}+2^{4!}+2^{5!} = 2^2+2^6+2^{24}+2^{120}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}(-2)^{i+k} = \; & (-2)^{1+1}+(-2)^{1+2}+(-2)^{1+3}+(-2)^{1+4}+ \\ & (-2)^{2+1}+(-2)^{2+2}+(-2)^{2+3}+(-2)^{2+4}+ \\ & (-2)^{3+1}+(-2)^{3+2}+(-2)^{3+3}+(-2)^{3+4}\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}(-2)^{i+k} = 4-8+16-32-8+16-32+64+16-32+64-128$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}(-2)^{i+k} = -60$$

$$\begin{aligned}(a+2)^8 = \; & \binom{8}{0}a^8+\binom{8}{1}a^7\cdot 2+\binom{8}{2}a^6\cdot 2^2+\binom{8}{3}a^5\cdot 2^3+\binom{8}{4}a^4\cdot 2^4 \\ & +\binom{8}{5}a^3\cdot 2^5+\binom{8}{6}a^2\cdot 2^6+\binom{8}{7}a\cdot 2^7+\binom{8}{8}2^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+2)^8 = \; & a^8+16a^7+112a^6+448a^5+1.120a^4+1.792a^3 \\ & +1.792a^2+1.024a+256\end{aligned}$$

2.) **Fragestellungen zur Kurvendiskussion**

a) Untersuchen Sie die Funktion $f_k(x)$ mit der Vorschrift

$$f_k(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x^3 - kx^2 \quad mit \quad k > 0$$

nach folgenden Kriterien:

(i) Nullstellen (ii) Wendepunkt(e)

(iii) Tangente in x = k

Lösung:

Nullstellen:

$$f_k(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x^3 - kx^2 \quad = \quad x^2\left(\frac{1}{2}x - k\right) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 2k$$

Wendepunkt:

$$f_k''(x) \quad = \quad 3x - 2k \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}k$$

$$f_k'''(x) \quad = \quad 3 \quad \neq \quad 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{2}{3}k \;\middle|\; -\frac{8}{27}k^3\right)$$

$$f_k\left(\frac{2}{3}k\right) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}k\right)^3 - k\left(\frac{2}{3}k\right)^2 \quad = \quad -\frac{8}{27}k^3$$

Tangente in x = k:

$$Funktionswert: \quad f_k(k) \quad = \quad \frac{1}{2}k^3 - k\cdot k^2 \quad = \quad -\frac{1}{2}k^3$$

$$Steigung: \quad f_k'(x) \quad = \quad \frac{3}{2}x^2 - 2kx \quad \Rightarrow \quad f_k'(k) \quad = \quad \frac{3}{2}\cdot k^2 - 2k\cdot k \quad = \quad -\frac{1}{2}k^2$$

$$t(x) \quad = \quad mx + b \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}k^3 \quad = \quad \left(-\frac{1}{2}k^2\right)\cdot k + b \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$\Rightarrow \quad t(x) \quad = \quad \left(-\frac{1}{2}k^2\right)\cdot x$$

b) Gegeben ist die Funktion $t_k(x)$ mit der Vorschrift

$$t_k(x) \quad = \quad e^x - kx \quad mit \quad k > 0$$

Bestimmen Sie Ortskurve der Extremwerte.

Anmerkung: ***Zur Ermittlung der Extremwerte genügt das Prüfen der notwendigen Bedingung!!!***

Lösung:

$$t_k'(x) \quad = \quad e^x - k \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad k = e^x$$

$$Ortskurve: \quad t_{k=e^x}(x) \quad = \quad e^x - k \cdot x \quad = \quad e^x - e^x \cdot x \quad = \quad e^x(1-x)$$

3.) **Matrizenrechnung**

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & k \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie die Lösungen zu folgenden Aufgabenstellungen:

a) $\left(3A - C^T\right)^2$

Lösung:

$$\left(3A - C^T\right)^2 = \left[\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 46 & 112 \\ 48 & 142 \end{pmatrix}$$

b) A^{-1}

Lösung:

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

c) $Det\left(A^2 \cdot C + B^T\right)$

Lösung:

$$Det\left(A^2 \cdot C + B^T\right) = Det\left[\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & k \end{pmatrix}\right] = Det\left[\begin{pmatrix} 43 & 18 \\ 44 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & k \end{pmatrix}\right]$$

$$Det\left(A^2 \cdot C + B^T\right) = Det\begin{pmatrix} 46 & 22 \\ 45 & 19+k \end{pmatrix} = 46 \cdot (19+k) - 45 \cdot 22 = 46k - 116$$

d) Für welchen Wert bzw. welche Werte von $k \in \Re$ ist B singulär?

Lösung:

$$B \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathrm{B}) \quad = \quad 0$$

$$\det(\mathrm{B}) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & k \end{pmatrix} \quad = \quad 3k - 4 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad k \quad = \quad \frac{4}{3}$$

4.) **Ableitungen**

Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen:

a) $f(x,y) \quad = \quad x \cdot \sqrt{y} + x \cdot y^2$

Lösung:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad = \quad \sqrt{y} + y^2 \qquad\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad = \quad \frac{x}{2\sqrt{y}} + 2x \cdot y$$

b) $f(x,y) \quad = \quad x^2 \cdot e^{x \cdot y} + x \cdot y$

Lösung:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad = \quad 2x \cdot e^{x \cdot y} + x^2 y \cdot e^{x \cdot y} + y \quad = \quad x \cdot e^{x \cdot y}(2 + xy) + y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad = \quad x^3 \cdot e^{x \cdot y} + x$$

5.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ein Betrieb produziert die Güter G_1 und G_2 in den Mengen x und y.
Die Gewinnfunktion hat die Form

$$g(x,y) \quad = \quad 100x + 140y - x^2 - 2xy - 2y^2$$

=> Bei welcher Anzahl wird der Gewinn maximal?
=> Beweisen Sie, dass Ihre Lösung ein Maximum darstellt.
=> Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Lösung:

$$\left.\begin{array}{lllll} I.) & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & = & 100 - 2x - 2y & = \quad 0 \\ II.) & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & = & 140 - 2x - 4y & = \quad 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{II.)-I.)} \begin{array}{l} y = 20 \\ x = 30 \end{array}$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(g) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Max(30 \mid 20 \mid 2.900)$$

6.) **Extrema mit Nebenbedingungen**

Gesucht ist das Produktionsoptimum, bei einem Kostenbudget von höchstens 4.800,00 Geldeinheiten:

Produktionsfunktion: $f(x,y) \quad = \quad 5 \cdot x^{0,4} \cdot y^{0,6}$

Preis Produktionsfaktor x: p_1 = 10 Geldeinheiten
Preis Produktionsfaktor y: p_2 = 12 Geldeinheiten

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 5 \cdot x^{0,4} \cdot y^{0,6} + \lambda(4.800 - 10x - 12y)$$

$$I.) \quad \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} \quad = \quad 2 \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} - 10\lambda \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} \quad = \quad \lambda$$

$$II.) \quad \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} \quad = \quad 3 \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} - 12\lambda \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} \quad = \quad \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} \quad = \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{5}{4}x$$

$$\xrightarrow{in\ NB} \quad 4.800 \quad = \quad 10x + 12 \cdot \frac{5}{4}x \quad \Rightarrow \quad 4.800 \quad = \quad 25x$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad 192 \quad \wedge \quad y \quad = \quad 240$$

$$\Rightarrow \quad q(192, 240) \quad = \quad 5 \cdot 192^{0,4} \cdot 240^{0,6} \quad = \quad 1.097,53$$

7.) **Totales Differential**

Der Gewinn einer Unternehmung hängt von drei Einflussgrößen in folgender Weise ab:

$$g(x, y, z) \quad = \quad 2x + x \cdot y^2 + 3z$$

Vom Ausgangsniveau P (5, 10, 10) könnte das Unternehmen jede Einflussgröße um 10 % erhöhen.

Um welchen Betrag verändert sich dann näherungsweise der Gewinn, wenn man das totale Differential zur Berechnung heranzieht?

<u>Lösung:</u>

$$\textit{Partielle Ableitungen}:$$

$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} \quad = \quad 2 + y^2 \qquad \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} \quad = \quad 2x \cdot y \qquad \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z} \quad = \quad 3$$

$$\textit{Totales Differential}:$$

$$dg(x, y, z) \quad = \quad \frac{\partial g(5,10,10)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial g(5,10,10)}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial g(5,10,10)}{\partial z} \cdot dz$$

$$dg(x, y, z) \quad = \quad 102 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \quad = \quad 154$$

8.) **Integralrechnung**

a) Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage:

$p_A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ und $p_N(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 15$

Lösung:

$$aus \quad p_A(x) = p_N(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + 5 \quad = \quad -\frac{1}{8}x^2 + 15$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{8}x^2-5} \quad \frac{5}{8}x^2 = 10 \quad \xrightarrow{\cdot\frac{8}{5}} \quad x^2 = 16 \quad \xrightarrow{\sqrt{\ }} \quad |x| = 4$$

$$p_A(4) = \frac{1}{2}\cdot 16 + 5 = 13 \quad \Rightarrow \quad M(4 \mid 13)$$

b) Ermitteln Sie die **Produzentenrente** bei x = 4.

Lösung:

$$P_R \quad = \quad 4\cdot 13 - \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)dx \quad = \quad 52 - \left[\frac{1}{6}x^3 + 5x\right]_0^4 \quad = \quad \frac{64}{3} \quad \approx \quad 21{,}33$$

9.) **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Eine Metallwarenfabrik stellt zwei Ersatzteile A und B auf drei Automaten I, II und III her. Teil A durchläuft alle drei Automaten, während Teil B nur die ersten beiden Automaten benötigt.
In nachfolgender Tabelle ist angegeben, wie viel Minuten jeder Automat zur Herstellung eines Teils benötigt und wie hoch die tägliche Einsatzzeit der drei Automaten ist.

Automat	**Benötigte Zeit in Minuten / Stück**		**Tgl. Gesamtzeit (in Minuten)**
	Ersatzteil A	**Ersatzteil B**	
I	**3**	**6**	**360**
II	**6**	**4**	**360**
III	**6**	**0**	**300**

Der Gewinn je Stück beträgt bei Ersatzteil A 5,00 € und bei Ersatzteil B 6,00 €.

Welche Stückzahl ist von jedem Ersatzteil täglich herzustellen, damit der Gesamtgewinn möglichst groß wird.

a) Lösen Sie die Aufgabe graphisch.

b) Bestimmen Sie das Maximum mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösung:

Bedingungen: **x = Anzahl der Produkte P_1 und y = Anzahl der Produkte P_2**

$$\begin{aligned} 3x+6y &\leq 360 \\ 6x+4y &\leq 360 \\ 6x &\leq 300 \end{aligned}$$

$$\text{Nichtnegativitätsbedingungen}: \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad y \geq 0$$

Zielfunktion: $5x+6y = Z \rightarrow \max.$

$$
\begin{array}{r|ccccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\
I.) & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 360 \\
II.) & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 360 \\
III.) & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \\
\hline
G: & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & Z
\end{array}
\qquad \xrightarrow{\frac{1}{6}\cdot I.)}
$$

$$
\begin{array}{r|ccccc|cl}
I.) & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 60 & \\
II.) & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 360 & \xrightarrow{II.)-4\cdot I.)} \\
III.) & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 & \\
\hline
G: & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & Z & \xrightarrow{G-6\cdot I.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ccccc|cl}
I.) & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 60 & \\
II.) & 4 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 120 & \xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot II.)} \\
III.) & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 & \\
\hline
G: & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & Z-360 &
\end{array}
$$

=>

$$
\begin{array}{rcccccc|c}
I.) & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & & 60 \xrightarrow{I.)-\frac{1}{2}\cdot II.)} \\
II.) & \color{red}{1} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & & 30 \\
III.) & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 300 \xrightarrow{III.)-\ 6\cdot II.)} \\
\hline
G: & \color{magenta}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & & Z-360 \xrightarrow{G-2\cdot II.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccccc|c}
I.) & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & & 45 \xrightarrow{I.)-\frac{1}{2}\cdot II.)} \\
II.) & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & & 30 \\
III.) & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & & 120 \xrightarrow{III.)-\ 6\cdot II.)} \\
\hline
G: & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & & Z-420 \xrightarrow{G-2\cdot II.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 120 \end{pmatrix} \quad mit \quad G_{\max} = 420
$$