Klausur: Mathematik am Freitag, den 26. Januar 2007

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1.) **Integralrechnung**

Gegeben seien die Angebotsfunktion $p_A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$

und die Nachfragefunktion $p_N(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 12$

Ermitteln Sie daraus die **Konsumenten- und Produzentenrente**.

Lösung:

$$\textit{Marktgleichgewicht}:$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2 \quad = \quad -\frac{1}{8}x^2 + 12$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{8}x^2 - 2} \quad \frac{5}{8}x^2 = 10 \quad \xrightarrow{\cdot\frac{8}{5}} \quad x^2 = 16 \quad \xrightarrow{\sqrt{\ }} \quad |x| = 4$$

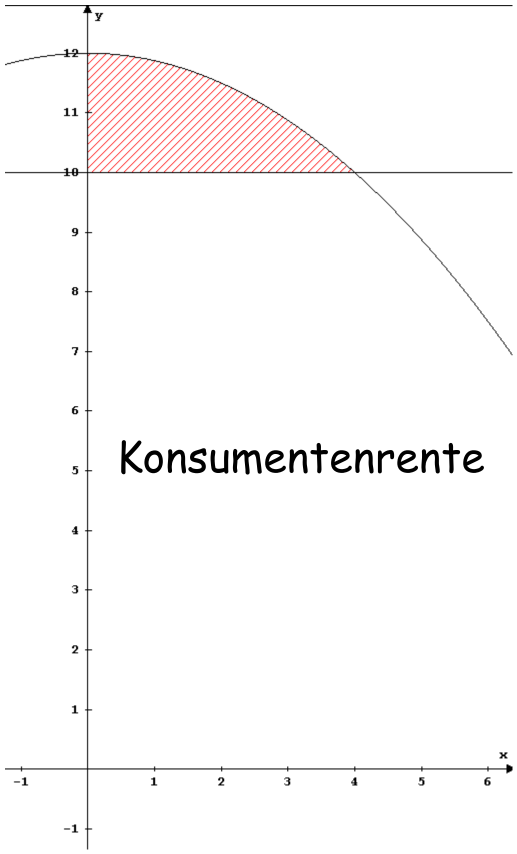
$$p_A(4) \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot 16 + 2 \quad = \quad 10 \quad \Rightarrow \quad M(4 \mid 10)$$

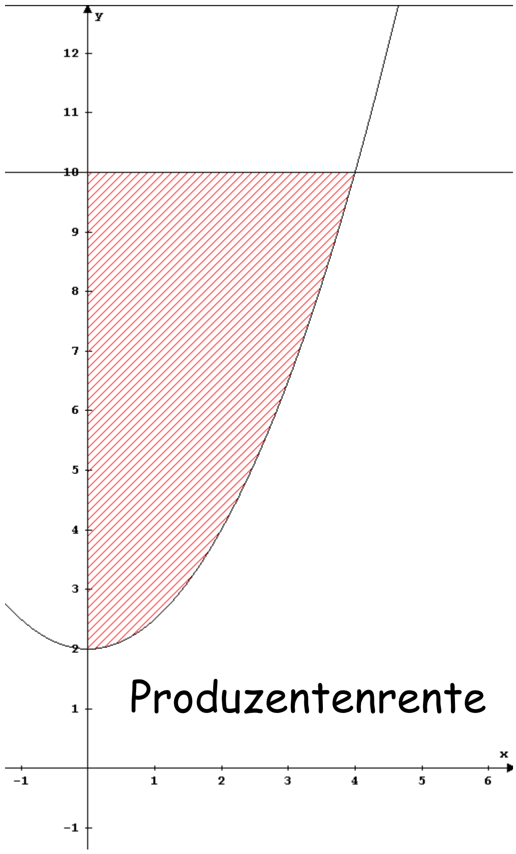
Konsumentenrente:

$$K_R \quad = \quad \int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 12\right)dx - 4\cdot 10 \quad = \quad \left[-\frac{1}{24}x^3 + 12x\right]_0^4 - 40 \quad = \quad 5\frac{1}{3}$$

Produzentenrente

$$P_R \quad = \quad 4\cdot 10 - \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)dx \quad = \quad 40 - \left[\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_0^4 \quad = \quad 21\frac{1}{3}$$





2.) **Ableitungen:**

Bilden Sie die jeweils ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $$f(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3\cdot y^2+\frac{1}{2}(x-1)^2\cdot\sqrt{z}$$

Lösung:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3\cdot y^2+\frac{1}{2}(x-1)^2\cdot\sqrt{z}$$

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}}\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x^2\cdot y^2+(x-1)\cdot\sqrt{z}$$

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2}{3}x^3\cdot y$$

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}}\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{4\cdot\sqrt{z}}(x-1)^2$$

b) $$f(x,y) = x \cdot e^{2y^2+3} + x$$

Lösung:

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \cdot e^{2y^2+3} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot 4y \cdot e^{2y^2+3}$$

c) $$f(x,y) = x^3 \cdot 2y + \ln\left(x^2 + y\right)$$

Lösung:

$$\xrightarrow{\text{Potenz- \& Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \cdot 2y + \frac{2x}{x^2 + y}$$

$$\xrightarrow{\text{Potenz- \& Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 + \frac{1}{x^2 + y}$$

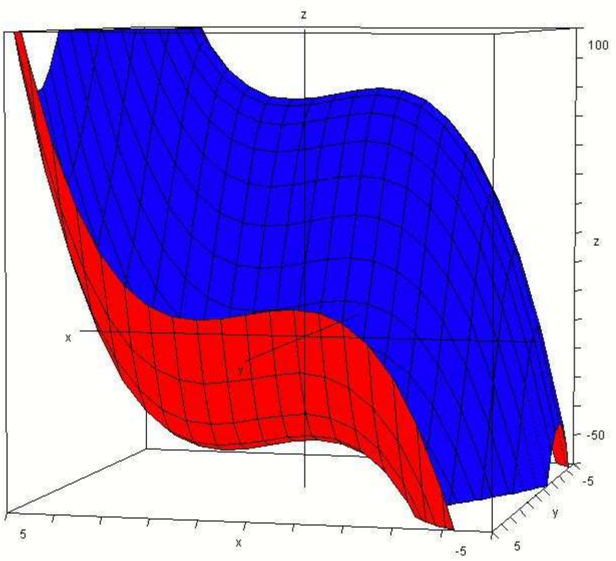
3.) **Optimum ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die 4 stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Lösung:



$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 1$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 27 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad |y| = 3$$

Es resultieren 4 stationäre Stellen:

$$S_1(1 \mid 3 \mid -32) \quad \wedge \quad S_2(1 \mid -3 \mid 76) \quad \wedge \quad S_3(-1 \mid 3 \mid -28) \quad \wedge \quad S_4(-1 \mid -3 \mid 80)$$

Hesse – Matrix:

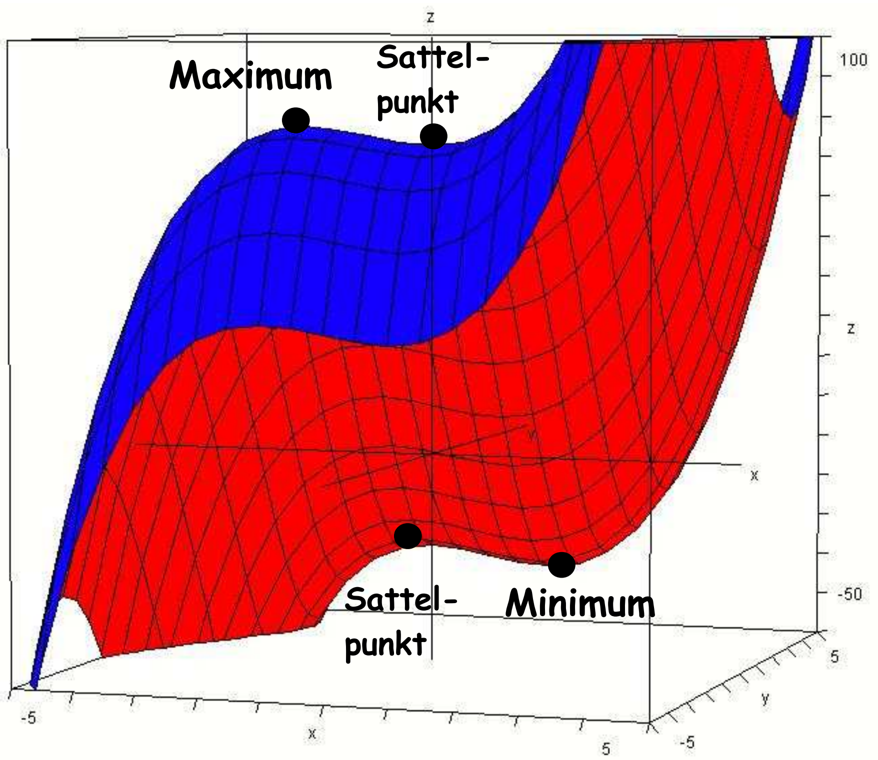
$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \xrightarrow{S_i \text{ einsetzen}}$$

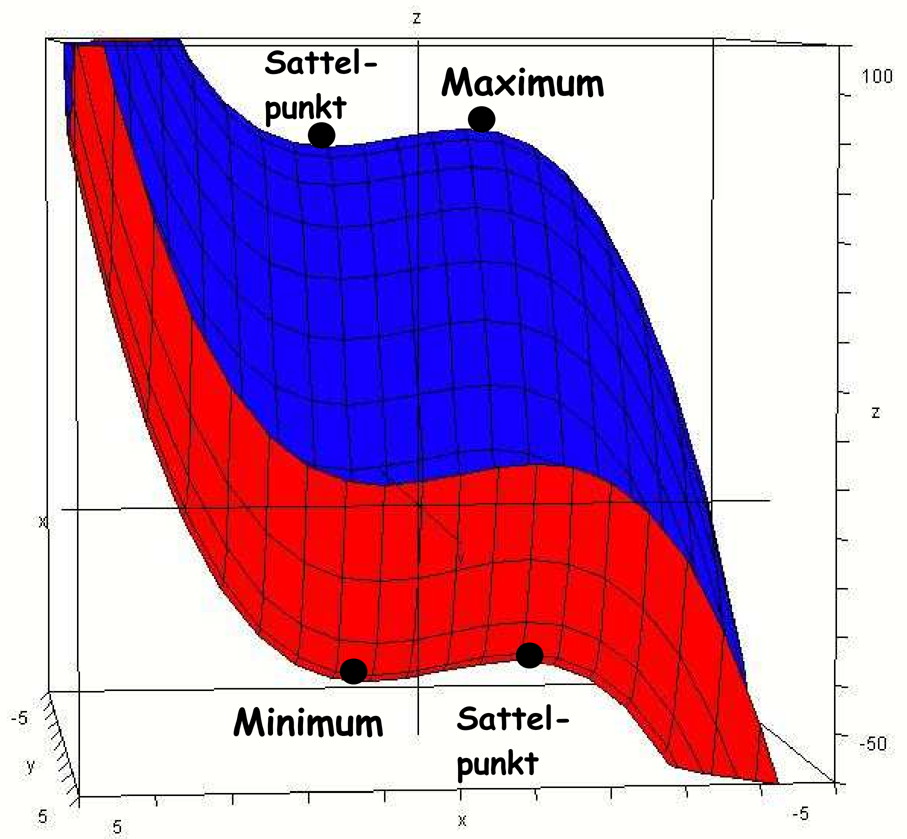
$$H\left(f_{S_1}(1 \mid 3)\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H) > 0 \quad \wedge \quad f_{xx} > 0 \Rightarrow Min(1 \mid 3 \mid -32)$$

$$H\left(f_{S_2}(1 \mid -3)\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H) < 0 \Rightarrow Sattelpunkt$$

$$H\left(f_{S_3}(-1 \mid 3)\right) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H) < 0 \Rightarrow Sattelpunkt$$

$$H\left(f_{S_4}(-1 \mid -3)\right) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H) > 0 \quad \wedge \quad f_{xx} < 0 \Rightarrow Max(-1 \mid -3 \mid 80)$$





4.) **Newton-Iteration**

Bestimmen Sie die Wurzel aus **23** mittels der Newton-Iteration auf drei Stellen genau.

Lösung: $$f(x) = x^2 - 23 \quad und \quad f'(x) = 2x$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	5	2	10	4.8
1	4.8	0.04	9.6	4.795833

5.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion f(x) mit der Vorschrift

$$f_t(x) = e^{t \cdot x} \cdot (x - 2) \qquad mit \quad t > 0$$

nach folgenden Kriterien:

a) Nullstellen **und** Schnittpunkt mit der y-Achse

Lösung:

$$f_t(x) = e^{t\cdot x}\cdot(x-2) \qquad mit \quad t>0$$

$Nullstellen:$

$$e^{t\cdot x}\cdot(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad \wedge \quad e^{t\cdot x}\neq 0$$

$Schnittpunkt\ mit\ y-Achse:$

$$f_t(0)=e^{t\cdot 0}\cdot(0-2)=1\cdot(-2)=(-2) \quad \Rightarrow \quad S_y(0\mid -2)$$

Die Ableitungen von $f_t(x)$ entsprechen folgendem Bildungsgesetz:

$$f_t^{(n)}(x) \quad = \quad t^{(n-1)}\cdot e^{tx}\cdot(tx-2t+n)$$

Anmerkung:

n bezeichnet den Grad der Ableitung; z.B. n = 1 bedeutet die erste Ableitung

---

b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion in Abhängigkeit von t.

Lösung:

$$f_t^{(n)}(x) \quad = \quad t^{(n-1)}\cdot e^{tx}\cdot(tx-2t+n)$$

$$\xrightarrow{n=1} \quad f_t'(x) \quad = \quad e^{tx}\cdot(tx-2t+1)$$

$$\xrightarrow{n=2} \quad f_t''(x) \quad = \quad t\cdot e^{tx}\cdot(tx-2t+2)$$

$Extremwerte:$

$$f_t'(x) \quad = \quad e^{tx}\cdot(tx-2t+1) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2t-1}{t} \quad \wedge \quad e^{tx}\neq 0$$

$$x=\frac{2t-1}{t} \quad in \quad f_t''(x);$$

$$f_t''\left(\frac{2t-1}{t}\right) \quad = \quad t\cdot e^{t\cdot\frac{2t-1}{t}}\cdot\left(t\cdot\frac{2t-1}{t}-2t+2\right) \quad = \quad t\cdot e^{2t-1}\cdot 1 \quad > \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad Min\left(\frac{2t-1}{t} \;\middle|\; f_t\left(\frac{2t-1}{t}\right)\right) \quad = \quad Min\left(\frac{2t-1}{t} \;\middle|\; -\frac{e^{2t-1}}{t}\right)$$

c) Zeigen Sie, dass $F_t(x) = e^{t\cdot x} \cdot \frac{tx - 2t - 1}{t^2}$ eine Stammfunktion zu $f_t(x)$ darstellt.

<u>Lösung:</u>

Zum Beweis: Ableitung der Stammfunktion $F_t(x)$ bilden:

$$F_t'(x) \underset{\text{Kettenregel}}{\overset{\text{Produkt- \&}}{=}} t \cdot e^{t\cdot x} \cdot \frac{tx - 2t - 1}{t^2} + e^{t\cdot x} \cdot \frac{1}{t}$$

$$F_t'(x) \underset{\text{und t kürzen}}{\overset{e^{t\cdot x}\ \text{ausklammern}}{=}} e^{t\cdot x} \cdot \left(\frac{tx - 2t - 1}{t} + \frac{1}{t} \right)$$

$$F_t'(x) \overset{\textit{zusammenfassen}}{=} e^{t\cdot x} \cdot \frac{tx - 2t - 1 + 1}{t}$$

$$F_t'(x) \overset{\textit{zusammenfassen}}{=} e^{t\cdot x} \cdot \frac{tx - 2t}{t} \overset{\textit{kürzen}}{=} e^{t\cdot x} \cdot (x - 2)$$

d) Berechnen Sie die Fläche im Intervall [0 ; 2] wenn t = 2 gilt.

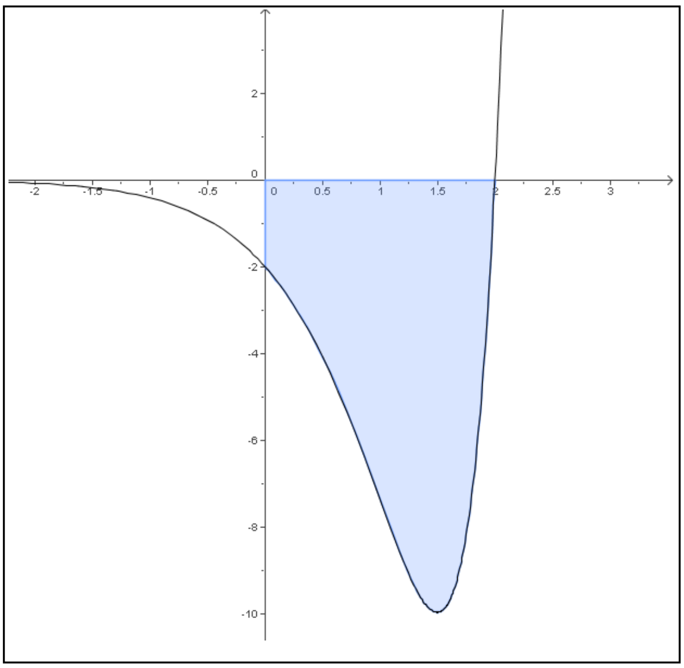
<u>Lösung:</u>

$$\left[F_2(x)\right]_0^2 = \left| \left[e^{2\cdot x} \cdot \frac{2x - 5}{4} \right]_0^2 \right|$$

$$\left[F_2(x)\right]_0^2 = \left| \left(-\frac{e^4}{4} \right) - \left(-\frac{5}{4} \right) \right|$$

$$\left[F_2(x)\right]_0^2 = \frac{e^4 - 5}{4}$$

$$\left[F_2(x)\right]_0^2 = 12{,}3995$$



6.) **Lösen Linearer Gleichungssysteme**

Lösen Sie die folgenden zwei LGS mit Verfahren Ihrer Wahl:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a)

Schrittweise Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} - x_2 + x_3 &= 18 \quad (1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \quad (2) \\ 3x_1 - x_3 &= 19 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - x_2 + x_3 &= 18 \quad (1) \\ x_1 + 1/2\, x_2 + 3/4\, x_3 &= 1/2 \quad (2) \\ 3x_1 - x_3 &= 19 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - x_2 + x_3 &= 18 \quad (1) \\ x_1 + 1/2\, x_2 + 3/4\, x_3 &= 1/2 \quad (2) \\ - 3/2\, x_2 - 13/4\, x_3 &= 35/2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\, x_2 + 3/4\, x_3 &= 1/2 \quad (1) \\ - x_2 + x_3 &= 18 \quad (2) \\ - 3/2\, x_2 - 13/4\, x_3 &= 35/2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\, x_2 + 3/4\, x_3 &= 1/2 \quad (1) \\ x_2 - x_3 &= -18 \quad (2) \\ - 3/2\, x_2 - 13/4\, x_3 &= 35/2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5/4\, x_3 &= 19/2 \quad (1) \\ x_2 - x_3 &= -18 \quad (2) \\ - 3/2\, x_2 - 13/4\, x_3 &= 35/2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5/4\, x_3 &= 19/2 \quad (1) \\ x_2 - x_3 &= -18 \quad (2) \\ - 19/4\, x_3 &= -19/2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5/4\, x_3 &= 19/2 \quad (1) \\ x_2 - x_3 &= -18 \quad (2) \\ x_3 &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 \quad (1) \\ x_2 - x_3 &= -18 \quad (2) \\ x_3 &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 \quad (1) \\ x_2 &= -16 \quad (2) \\ x_3 &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 7$

$x_2 = -16$

$x_3 = 2$

b)

Schrittweise Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \quad (1)\\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \quad (2)\\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \quad (1)\\ 4x_2 - 7x_3 &= 2 \quad (2)\\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \quad (1)\\ 4x_2 - 7x_3 &= 2 \quad (2)\\ -3x_2 + 4x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \quad (1)\\ x_2 - 7/4\, x_3 &= 1/2 \quad (2)\\ -3x_2 + 4x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5/4\, x_3 &= 1/2 \quad (1)\\ x_2 - 7/4\, x_3 &= 1/2 \quad (2)\\ -3x_2 + 4x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5/4\, x_3 &= 1/2 \quad (1)\\ x_2 - 7/4\, x_3 &= 1/2 \quad (2)\\ -5/4\, x_3 &= 5/2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5/4\, x_3 &= 1/2 \quad (1)\\ x_2 - 7/4\, x_3 &= 1/2 \quad (2)\\ x_3 &= -2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \quad (1)\\ x_2 - 7/4\, x_3 &= 1/2 \quad (2)\\ x_3 &= -2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \quad (1)\\ x_2 &= -3 \quad (2)\\ x_3 &= -2 \quad (3) \end{aligned}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 3$

$x_2 = -3$

$x_3 = -2$

7.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ und $M_{ZE} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Wie viele Rohstoffe werden für je eine Mengeneinheit der Endprodukte benötigt?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 19 & 26 \\ 29 & 15 & 22 \\ 34 & 14 & 24 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe müssen für einen Auftrag von 10 E_1, 30 E_2 und 20 E_3 im Lager vorrätig sein?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 33 & 19 & 26 \\ 29 & 15 & 22 \\ 34 & 14 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.420 \\ 1.180 \\ 1.240 \end{pmatrix}$$

8.) **Berechnen mathematischer Ausdrücke**

Bestimmen Sie die Lösung folgender Gleichungen und Ausdrücke:

a) $$\sum_{i=1}^{50}\left(\frac{1}{2}i\right)$$

b) $$\sum_{i=4}^{25}(i-4)$$

c) $$Det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $$Det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

a) $$\sum_{i=1}^{50}\left(\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{50}i=\frac{1}{2}\cdot\frac{50\cdot 51}{2}=637,5$$

b) $$\sum_{i=4}^{25}(i-4)=\sum_{i=1}^{22}(i-1)=\sum_{i=1}^{22}i-\sum_{i=1}^{22}1=\frac{22\cdot 23}{2}-22\cdot 1=231$$

c)

$$Det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.)-2\cdot I.)} Det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1.Spalte:

$$1\cdot Det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} 3+0+48-0-12+4 = 43$$

d) vgl. c)

9.) **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Gesucht ist das Maximum der Funktion G(x,y) = 4x + 5y unter Berücksichtigung folgender Nebenbedingungen:

I.) $2x + y \leq 20$ und II.) $3x + 4y \leq 60$

a) Bestimmen Sie graphisch das Maximum von G.

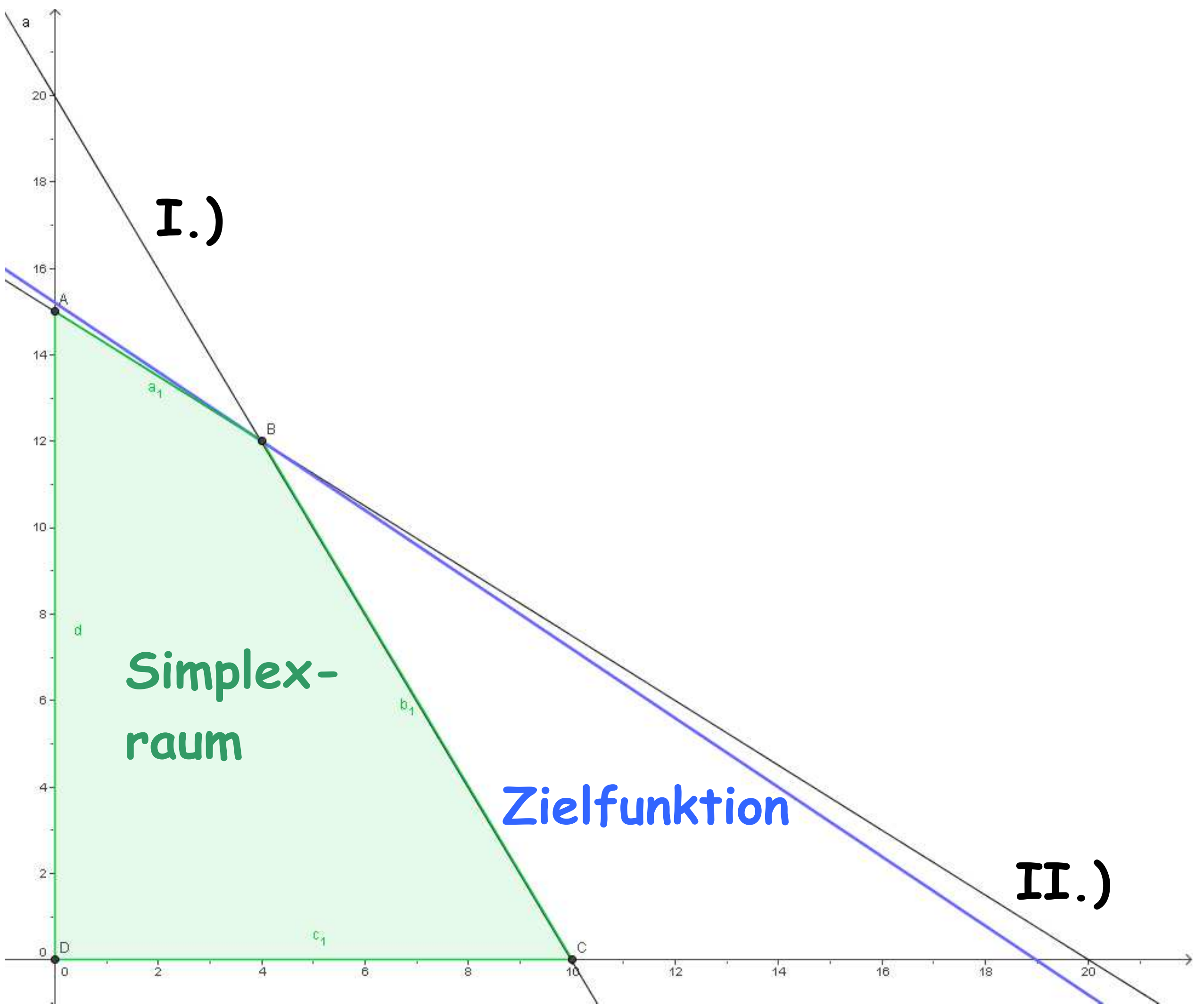
b) Bestimmen Sie das Maximum mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

<u>Lösung:</u>

<u>Bedingungen:</u> **x = Anzahl der Produkte P_1 und y = Anzahl der Produkte P_2**

$$I.) \quad 2x + y \leq 20 \qquad Nichtnegativitätsbedingungen:$$
$$II.) \quad 3x + 4y \leq 60 \qquad x \geq 0 \quad und \quad y \geq 0$$

<u>Zielfunktion:</u> $4x + 5y = Z \rightarrow \text{max}.$



Simplexalgorithmus:

$$
\begin{array}{lcccc|cl}
 & x & y & u_1 & u_2 & b & \\
I.) & 2 & 1 & 1 & 0 & 20 & \\
II.) & 3 & 4 & 0 & 1 & 60 & \xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot II.)} \\
\hline
G: & 4 & 5 & 0 & 0 & Z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc|cl}
I.) & 2 & 1 & 1 & 0 & 20 & \xrightarrow{I.)-II.)} \\
II.) & \frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 15 & \\
\hline
G: & 4 & 5 & 0 & 0 & Z & \xrightarrow{G-5\cdot II.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc|cl}
I.) & \frac{5}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 5 & \xrightarrow{\frac{4}{5}\cdot I.)} \\
II.) & \frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 15 & \\
\hline
G: & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & Z-75 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc|cl}
I.) & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 4 & \\
II.) & \frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 15 & \xrightarrow{II.)-\frac{3}{4}\cdot I.)} \\
\hline
G: & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & Z-75 & \xrightarrow{G-\frac{1}{4}\cdot I.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc|c}
I.) & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 4 \\
II.) & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 12 \\
\hline
G: & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{6}{5} & Z-76
\end{array}
$$

10.) **Investitionsrechnung**

Die haben zwei Projekte zur Auswahl und sollen eine Investitionsentscheidung treffen.

Beide Projekte verursachen eine Anfangsausgabe von je 10.000,00 €.

Die Rückflüsse für Projekt I in den folgenden vier Jahren würden bei 3.000 € (Jahr 1), 4.000 € (Jahr 2), 2.000 € (Jahr 3) und 5.000 € (Jahr 4) liegen.

Projekt II würde in den ersten beiden Jahren keine Rückflüsse erbringen, aber mit 8.000 € (Jahr 3) und 6.000 € (Jahr 4) absolut gesehen einen vermeintlich höheren Ertrag liefern.

a) Beurteilen Sie die Situation auf Basis eines Kalkulationszinssatzes von 5 % mit Hilfe der Kapitalwertmethode und treffen Sie eine Investitionsentscheidung.

Lösung:

Projekt I:

$$C_0 = -10.000 + \frac{3.000}{1,05} + \frac{4.000}{1,05^2} + \frac{2.000}{1,05^3} + \frac{5.000}{1,05^4} = 2.326,45$$

Projekt II:

$$C_0 = -10.000 + \frac{0}{1,05} + \frac{0}{1,05^2} + \frac{8.000}{1,05^3} + \frac{6.000}{1,05^4} = 1.846,92$$

Da das Projekt I den höheren Kapitalwert besitzt, sollte man sich für dieses entscheiden.

b) Wie hoch wäre der interne Zinsfuß/-satz für Projekt I? (Anmerkung: eine Näherung per Newton-Iteration genügt!)

Lösung:

Projekt I:

$$C_0(q) = -10.000 + \frac{3.000}{q} + \frac{4.000}{q^2} + \frac{2.000}{q^3} + \frac{5.000}{q^4} \overset{!}{=} 0$$

$$-10q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 2q + 5 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{Lösung per Newton-Iteration}}$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1.1	1.392	-31.55	1.14412
1	1.1441	-0.1178254	-36.9726	1.14093

Der interne Zinsfuß liegt bei etwa p_{intern} = 14,09 [%]

11.) **Vollständiges Differential und Optimum mit Nebenbedingungen**

Gesucht ist das Haushaltsoptimum, wenn folgende Daten vorliegen:

Nutzenfunktion: $u(x,y) \quad = \quad 4x^{0,3} \cdot y^{0,7}$

Güterpreise: p_1 = 8 Geldeinheiten p_2 = 14 Geldeinheiten

Konsumbudget: 1.200 Geldeinheiten

a) Bilden Sie das totale Differential $d\,u$ der Nutzenfunktion, wenn sich der Nutzen von $P_1(x/y) = (9/9)$ auf von $P_2(x/y) = (10/8)$ ändert.

Lösung:

$$u(x,y) \quad = \quad 4x^{0,3} \cdot y^{0,7}$$

$$d\,u \quad = \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cdot dy$$

$$d\,u \quad = \quad \frac{1,2 \cdot y^{0,7}}{x^{0,7}} \cdot (10-9) + \frac{2,8 \cdot x^{0,3}}{y^{0,3}} \cdot (8-9) \quad = \quad 1,2 \cdot 1 + 2,8 \cdot (-1) \quad = \quad -1,6$$

b) Wie groß ist die tatsächliche Veränderung $\Delta\,u$?

Lösung:

$$\Delta\,u \quad = \quad u(10,8) \quad - \quad u(9,9)$$

$$\Delta\,u \quad = \quad 4 \cdot \left(10^{0,3} \cdot 8^{0,7} \quad - \quad 9^{0,3} \cdot 9^{0,7}\right)$$

$$\Delta\,u \quad = \quad 4 \cdot (8,5539 \quad - \quad 9) \quad = \quad -1,7845$$

c) Ermitteln Sie eine analytische Lösung des Optimierungsproblems mittels Lagrangeansatz.

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 4x^{0,3}y^{0,7}+\lambda(1.200-8x-14y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 1,2\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}-8\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 0,15\cdot\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 2,8\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}-14\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 0,2\cdot\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

$Austauschverhältnis:$

$$0,15\cdot\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} \quad = \quad 0,2\cdot\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{4}{3}x$$

$eingesetzt\ in\ NB:$

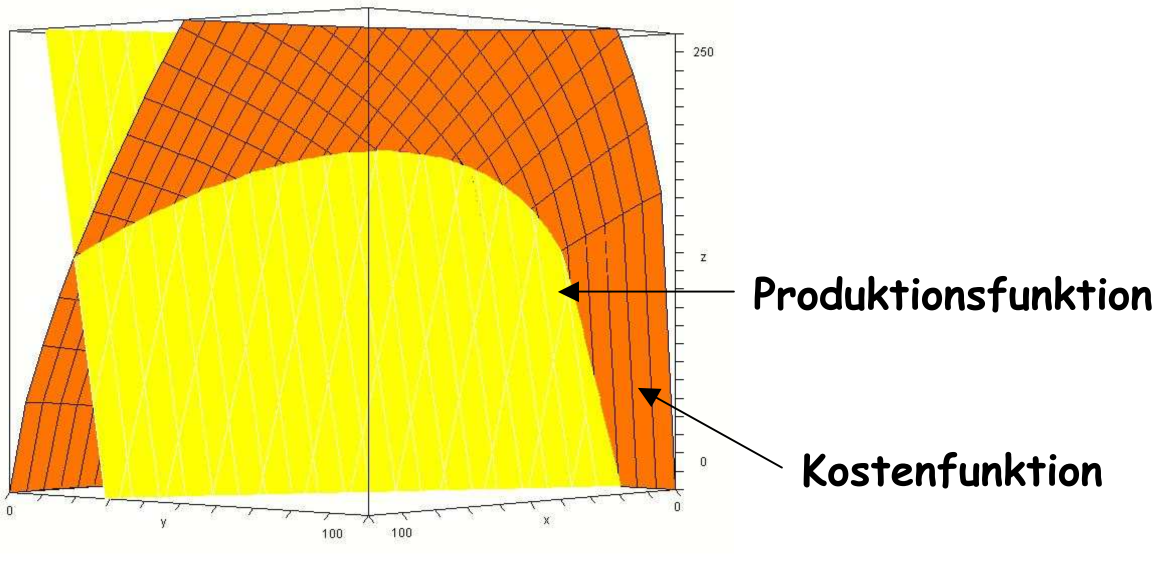
$$1.200 \quad = \quad 8x+14y \quad \xrightarrow{y=\frac{4}{3}x} \quad 1.200 \quad = \quad 8x+14\cdot\frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 1.200 \quad = \quad 26\frac{2}{3}x \quad \Rightarrow \quad 1.200 \quad = \quad \frac{80}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad x=45 \quad \Rightarrow \quad y=60$$

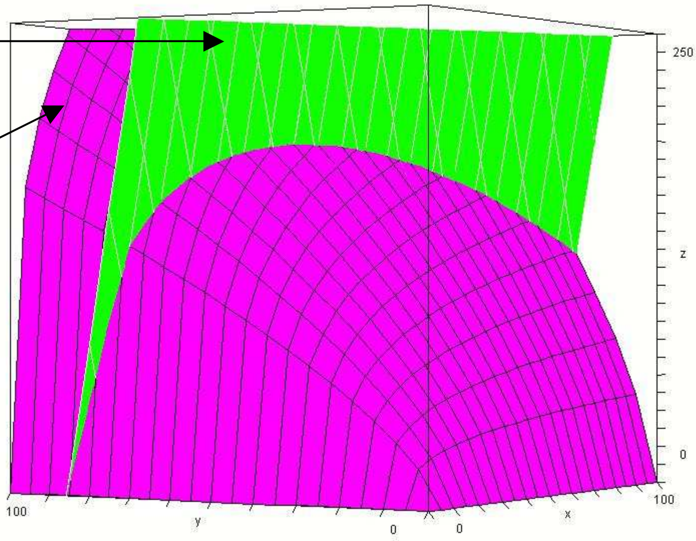
d) Wie hoch ist der Nutzen im Optimum?

Lösung: $u(45 \mid 60)=4\cdot 45^{0,3}\cdot 60^{0,7}=220,16$

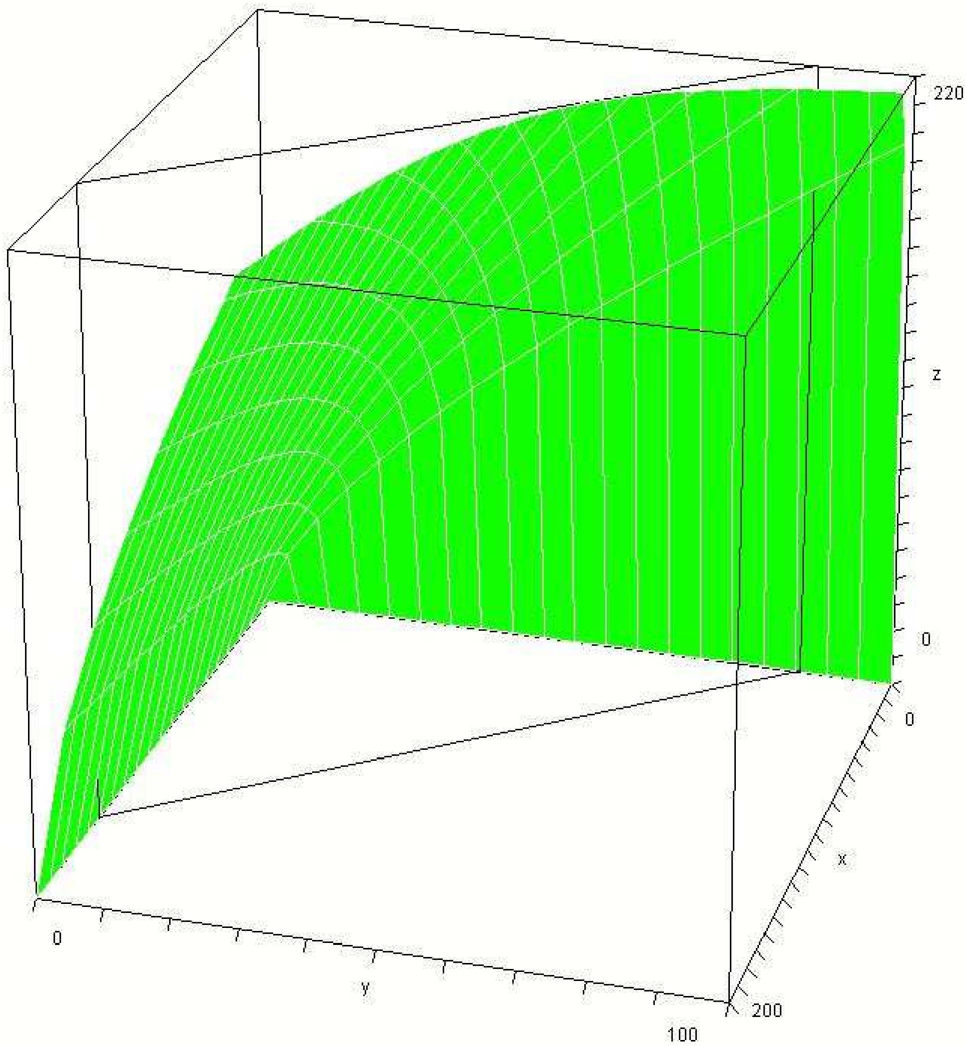


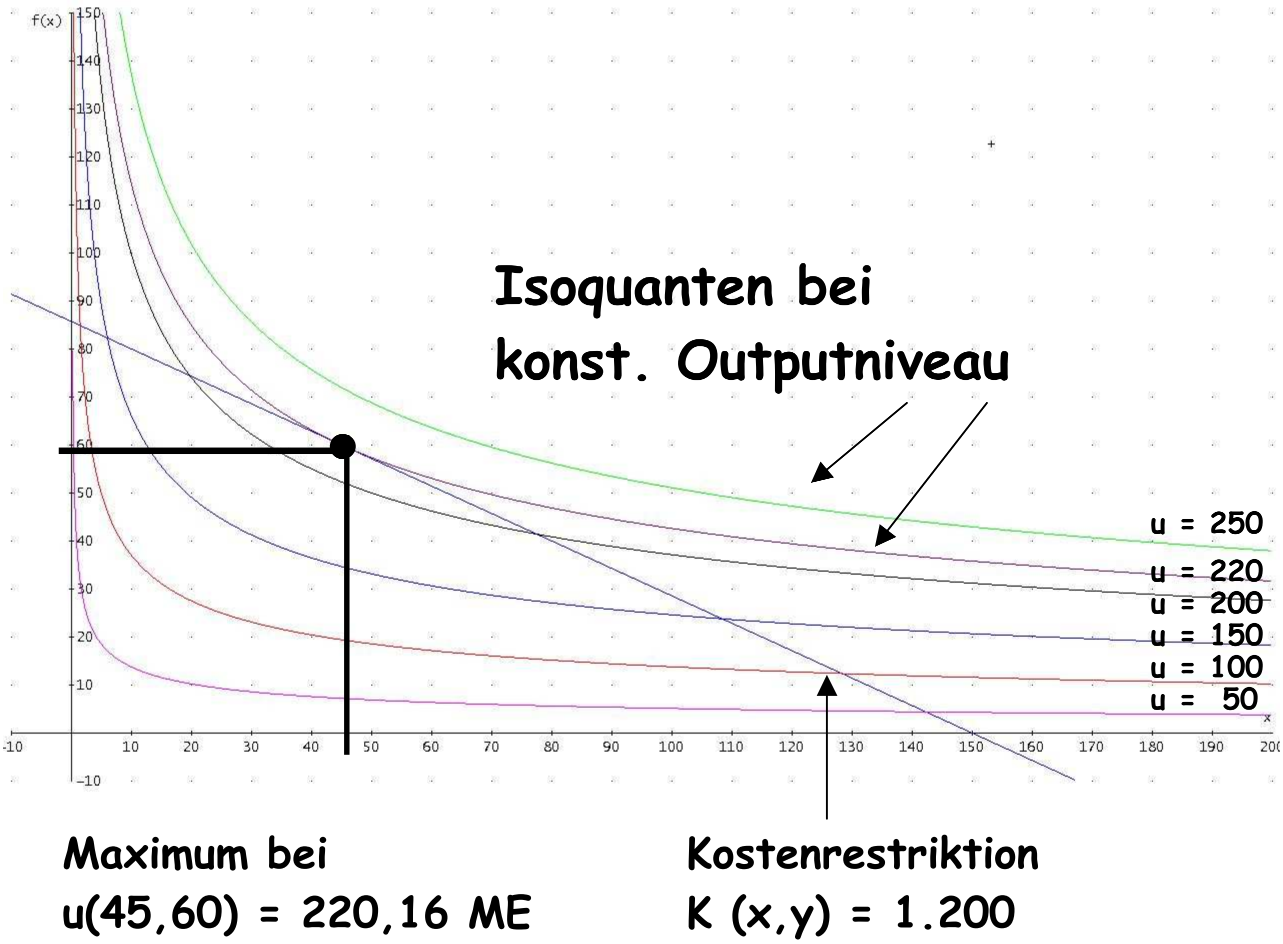
Kostenfunktion

Produktionsfunktion



Herleitung der graphischen Lösung:





Betrachtet man die beiden Funktionen in zweidimensionaler Form, so entstehen die Isoquanten. Im Tangentenpunkt zwischen Kosten- und Produktionsfunktion liegt dann das Produktionsmaximum unter Berücksichtigung der Kostenrestriktion.